

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1929, BAND 2, HEFT 7

Zur Theorie der Rekristallisation reiner Metalle Von Ulrich Dehlinger

(Stuttgarter Habilitationsschrift)

(Mit 8 Figuren)

§ 1. Vorbemerkungen

Versuche, die Erscheinungen der Rekristallisation atomistisch zu deuten, liegen bisher kaum vor.¹⁾ Dennoch erscheint es heute, wo uns die Röntgenuntersuchung bis zu einer gewissen Grenze die Möglichkeit, atomare Größen auszumessen, gibt, dringend erforderlich, einmal ein atomistisches Bild des Zustandes eines verformten Metalls aufzustellen und dann unter konsequenter Anwendung mechanischer und thermodynamischer Überlegungen die vielfältigen Erscheinungsformen der Rekristallisation zu erklären. Einen solchen Versuch bildet die vorliegende Arbeit.

Sie geht zunächst aus von der röntgenographischen Erforschung des verformten Zustands. In den Paragraphen 2, 3 und 4 werden eigene experimentelle Untersuchungen in dieser Richtung beschrieben und diskutiert, welche die Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verfassers (2) bilden, und eine bestimmte Art von Gitterdeformationen („Elastische Spannungen“) des verformten Zustands eindeutig nachweisen.

Einen weiteren experimentellen Ausgangspunkt und zugleich das Hauptproblem der Theorie bildet ein Gesetz für den Zeit- und Temperaturverlauf der Rekristallisationserscheinungen, welches in § 5 auf Grund des in der Literatur niedergelegten experimentellen Materials aufgestellt wird.

Dieses Gesetz führt zu einer genauen Definition der Rekristallisationstemperatur, es führt weiter dazu, den verformten

1) Zusammenfassung experimenteller Tatsachen in (9), Historisches in (16), neuere Theorien in (10, 12, 13). Vgl. auch S. 784.

Zustand unterhalb dieser Temperatur als im metastabilen Gleichgewicht befindlich aufzufassen (§ 7). Um das zu erreichen, wird eine zweite Art von Gitterdeformationen eingeführt, welche die Gitterbereiche verschiedener Orientierung miteinander verkettet (§ 8). In § 11—14 wird das Gleichgewicht dieser „Verhakungen“ berechnet. Wenn sie unter dem Einfluß der Temperaturbewegungen instabil geworden sind (§ 15—18), kann die Kornneubildung einsetzen. Von dieser Kornneubildung kann in § 19 ein begründetes Bild gegeben werden. Aus diesem folgt eine mit der experimentellen Erfahrung (§ 20—21) übereinstimmende Regel für die kristallographische Orientierung der neugebildeten Körner, d. h. die Rekristallisationslage (§ 22).

Nach unserer Auffassung besteht also die Rekristallisation aus mindestens zwei aufeinanderfolgenden Vorgängen. Der erste, die „Auflösung der Verhakungen“ ist äußerlich, auch röntgenographisch, nicht sichtbar. Er bestimmt aber die Rekristallisationstemperatur und den übrigen zeitlichen Verlauf der Erscheinungen. Darauf erst folgen die weiteren Vorgänge, je nach den im verformten Zustand noch vorhandenen elastischen inneren Spannungen, zunächst die Erholung oder sofort die Kornneubildung.¹⁾

I. Der verformte Zustand

§ 2. Verformte Körner im Mikroskop und im Röntgenbild

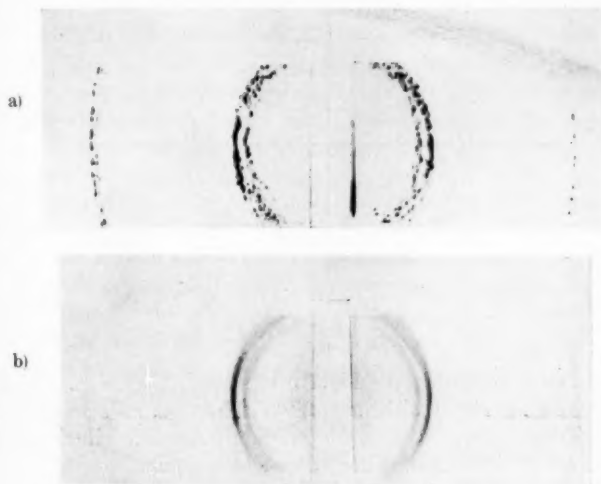
Um einen Einblick in das Gefüge des verformten Zustands zu bekommen, untersuchen wir zuerst, wie sich die Körner des ursprünglichen, durch Guß oder Rekristallisation entstandenen Zustands bei einer Verformung ändern.

Walzgrade von 5—10 Proz. lassen sich am Schliff *mikroskopisch* im allgemeinen nicht nachweisen. Ein grobkörniges Ausgangsmaterial zeigt nach einer solchen Verformung dieselben Körner wie vorher. Folgendes Beispiel beweist aber, daß das *Röntgenbild* weitgehende Veränderungen im Korn erkennen läßt.

Ein Aluminiumblech, welches nach dem Kaltwalzen bei 400° geglüht war, so daß es Körner mittlerer Größe hatte, wurde als Ausgangsmaterial gewählt. Röntgen- und Schliffbilder wurden aufgenommen, darauf das Blech um 10 Proz. gewalzt und die Aufnahmen wiederholt. Die Schliffbilder wiesen

1) Ein vorläufiger Bericht über die Arbeit erschien in (1).

keinen Unterschied auf (Ätzung mit warmer Natronlauge plus H_2O_2 , darauf mit Chromsäure). Die Röntgenaufnahmen wurden sowohl mit der von H. Widmann (4, 5) beschriebenen Laue-apparatur (Durchstrahlung mit gefilterter Silberstrahlung), als auch mit der vom Verfasser (2) beschriebenen kleinen Kammer für die letzten Linien gemacht (Anstrahlung mit Kupferstrahlung). Bei beiden Aufnahmearten sieht man im Ausgangszustand einzelne, deutlich getrennte Punkte, deren jeder einem Korn entspricht (Fig. 1 a). Nach dem Walzen sind auf der Laueaufnahme



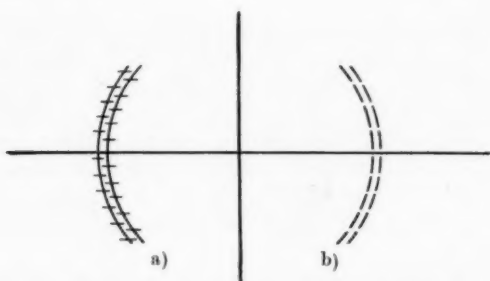
Linie (333) von Al vor und nach kleiner Verformung
Fig. 1

die Punkte verwaschen, die Aufnahme der letzten Linien zeigt überhaupt *keine Körner* mehr. Sie ist als besonders charakteristisch hier wiedergegeben (Fig. 1b).

Wenn das monochromatische Röntgenbild eines Korns verwaschen wird, ohne daß die Einstellung geändert wurde, so ist das ein Kennzeichen dafür, daß das vorher zusammenhängende Kristallgitter des Korns in *einzelne Teile* von wenig verschiedener Orientierung *aufgespalten* wurde. Dieser Unterschied der Orientierung ist bei kleinen Deformationsgraden aber offenbar so klein, daß eine Abweichung bei der Reflexion op-

tischen Lichtes noch nicht zu bemerken ist. Erst bei höheren Walzgraden werden die einzelnen Kornteile weiter voneinander getrennt, und in die Richtung einer Deformationsstruktur gelenkt. Bekanntlich sind dann im Mikroskop keinerlei Körner mehr zu sehen.

Wie aus der wiedergegebenen Aufnahme ersichtlich ist, tritt beim Walzen von Aluminium keine Verbreiterung der Linien des Dubletts ein, d. h. die Verwaschenheit der Körner



a) Verbreiterte, b) verwaschene Debyelinie

Fig. 2

geht in einer Richtung, die Fig. 2b schematisch anzeigt. Die in der dazu senkrechten Richtung (a) vor sich gehende *Verbreiterung*, die bei den meisten andern Materialien außerdem eintritt, soll im nächsten Abschnitt näher besprochen werden.

§ 3. Die Verbreiterung rührt her von einer vielkristallinen Biegegleitung

In (2) wurde gezeigt, daß die Verbreiterung nicht direkt mit der Verfestigung zusammenhängt, so daß z. B. kaltgewalztes Silber aller Art verbreiterte Debyelinien gibt, während Aluminium vom selben Walzgrad und ungefähr derselben Verfestigung niemals verbreitert. Weiter wurde durch eine Berechnung nach der Laueschen Theorie gezeigt, daß eine Verbreiterung durch Verbiegung der Gleitlamellen hervorgerufen sein kann und ein Bild davon gegeben, wie durch Druckkräfte eine solche Verbiegung entstehen kann. Durch die weitere Verfolgung dieses Bildes wurde der folgende Versuch angeregt, der

die Bestätigung der in (2) nur als möglich hingestellten Annahmen bringt und zugleich zeigt, wie diese Verbiegung mit der bei Einkristallen beobachteten Biegegleitung zusammenhängt.

Ein durch Glühen auf 200° rekristallisiertes Silberblech wurde auf der Zerreißmaschine zerrissen und von der Reißstelle in der in (2) beschriebenen Kammer hoher Auflösung eine Debyeaufnahme gemacht. Dabei erschienen die Ringe scharf, obgleich keinerlei Körner zu sehen waren. Darauf wurde dasselbe Stück um 10 Proz. gewalzt. Jetzt waren die Ringe wie bei den früheren Aufnahmen verbreitert. Der Versuch wurde mit demselben Ergebnis an Kupfer angestellt.

a) Nun ergeben die Untersuchungen Ludwicks¹⁾, daß die Verfestigung bei allen Verformungsarten, wie Walzen, Zug an der Zerreißmaschine oder Ziehen durch Düsen derselben Kurve folgt, wenn sie stets auf die Querschnittsverminderung bezogen wird. Der Teil des Verformungsvorganges, der mit der Verfestigung verbunden ist, verläuft also stets gleich, wie auch die äußeren Kräfte sind, welche die Verformung verursachen. Daß diese Verformung auch bei unserem Zugversuch schon eine beträchtliche Größe erreicht hat, welche der eines 20 prozentigen Walzens nahe kommt, geht aus dem Verschwinden der Körner hervor, welches nach § 2 bei 5—10 Proz. Walzgrad einsetzt.

Wenn nun das einmal, nämlich beim Walzen und beim Ziehen durch Düsen, eine Verbreiterung auftritt, das anderemal, beim Zug an der Zerreißmaschine aber nicht, so muß die Verbreiterung von einer Nebenwirkung der verformenden Kräfte herrühren, welche unabhängig ist von der Verfestigung. Das wurde auch in (2) gefunden. Jetzt aber können wir weiter schließen, daß die Verbreiterung eine spezifische Wirkung der beim Walzen und Düsenzichen auftretenden Kräfte ist. Eine solche spezifische Wirkung ist aber der starke *seitliche Druck*²⁾, der in beiden Fällen, im Gegensatz zum freien Zug an der Zerreißmaschine vorhanden ist, und zwar diejenige Druckkomponente, welche keine Verformungsarbeit leistet. Eine solche Kraftkomponente, die nicht in eine mögliche Gleitrichtung

1) Vgl. bei G. Sachs, *Mech. Technolog. d. Metalle*. Leipzig 1925.

2) Der Walzdruck ist, insbesondere bei dünnen Blechen, hier höher als der zum Zerreißen nötige Zug an der Zerreißmaschine. Siehe L. Weiss, *Ztschr. f. Metallk.* 15. S. 133. 1923; 14. S. 162. 1922.

fällt, *verbiegt die einzelnen Gleitlamellen elastisch.*¹⁾ Wie in § 7 gezeigt wird, werden diese Deformationen nach Aufhebung der äußeren Kräfte durch die außerdem entstandenen „überelastischen“, nicht homogenen Deformationen am Zurückgehen verhindert.

b) Diese Verhältnisse sind beim Zugversuch an Einkristallen schon studiert worden und als Biegegleitung²⁾ bezeichnet worden. Bei dem viel stärkeren Druck der Walze tritt aber eine derartige Verbiegung in viel stärkerem Maße auf.

Die Fig. 3 soll schematisch erklären, wie eine derartige, keine Verformungsarbeit leistende Druckkomponente wirkt. Es

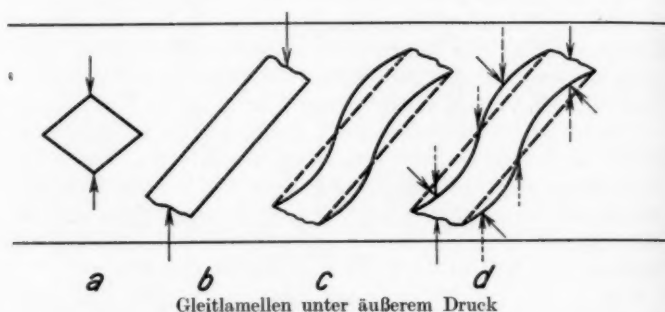


Fig. 3

seien zwei zueinander senkrechte Gleitrichtungen in der Zeichenebene vorhanden. Nach den Überlegungen Polanyi's³⁾ wird sich dann eine Walzlage einstellen, die symmetrisch ist zu der Krafrichtung. Ein Kristallbereich, der genau diese Lage hat, wird bei der Beanspruchung nicht verbogen, da auf ihn keine Kraftkomponente wirkt, die ein Drehmoment ausübt (a). Sobald aber der Bereich etwas aus dieser Lage gerückt ist, geht der Gleitvorgang nach Polanyi nur in *einer* Richtung vor sich.

1) Vgl. auch (33). Wenn aber R. Becker später (Ztschr. f. Phys. 47. S. 454. 1928) im Gegensatz zu F. v. Göler u. G. Sachs (Ztschr. f. Metallk. 19. S. 410. 1927) einen Zusammenhang dieser Verbiegungen mit der Verfestigung vermutet, so können wir uns nach (2) dem nicht anschließen.

2) M. Polanyi u. E. Schmid, Vh. d. Dtsch. phys. Gesellschaft; E. Schiebold, Ztschr. f. Metallk. 16. S. 462. 1924.

3) M. Polanyi, Ztschr. f. Phys. 17. S. 42. 1923.

Entsprechend bildet sich auch durch Spaltung nach nur *einer* wirkenden Gleitebene eine Gleitlamelle aus, deren lange Seite in die Gleitrichtung fällt. Auf diese Lamelle wirkt nun ein Kräftepaar (b), das eine zylindrische, wellenförmige Verbiegung hervorruft (c), deren Achse ungefähr senkrecht zur Druckrichtung ist und in der Ebene größter Ausdehnung der Gleitlamelle liegt, also senkrecht zur nicht betätigten Gleitrichtung ist oder senkrecht zur Ebene der Streuung um die ideale Walzlage. Sie wird außerdem um so größer, je größer die Abweichung von dieser ist.¹⁾ (Siehe auch § 22.)

Nun ist nach Polanyi die Walzlage durch das Zusammenwirken zweier Bewegungsrichtungen zu erklären, von denen die eine die Längung in der Walzrichtung, die andere die Breitung in der Querrichtung hervorbringt.²⁾ Die erstere legt die [112]-Richtung als Walzrichtung fest, dabei ist die Streuung nur ca. 8° , die letztere die (110)-Ebene als Walzebene mit einer Streuung von ungefähr 30° . Dementsprechend ist auch die Verbiegung in der ersteren Richtung, welche ganz der Biegegleitung beim Zugversuch entspricht und sich in einer Linienverbreiterung beim zerrissenen Material äußern würde, viel kleiner als die in der zweiten Richtung, welche nur beim Walzen und Düsenziehen auftritt.

c) Man sieht, wie die Größe dieser Verbiegung ganz davon abhängt, wie die einzelnen Gleitrichtungen nacheinander ins Spiel treten, insbesondere von der latenten Verfestigung der Gleitrichtungen.³⁾ Aus der Tatsache, daß Aluminium nicht merkbar verbreitert, würde folgen, daß hier eine Gleitrichtung viel leichter anzuregen ist als bei anderen Metallen. Das hängt wohl damit zusammen, daß bei Al-Einkristallen sichtbare Gleitlinien nur unter ganz besonderen Vorsichtsmaßregeln zu erhalten sind.

Der beim leichten Verformen größerer Kristalle zu beobachtende Asterismus der Lauebilder ist ebenfalls auf elastische,

1) Das stimmt überein mit der in (2) gefundenen Tatsache, daß schon kleine Walzgrade in voller Größe verbreiternd wirken.

2) Vgl. auch G. Sachs, Ztschr. f. Metallk. 19. S. 189. 1927.

3) Von der Elastizitätsgrenze des Metalls hängt sie selbstverständlich nicht ab, die in den Gleitlamellen bestehenden elastischen Spannungen können diese wesentlich überschreiten.

innere Deformationen, insbesondere Verbiegungen, zurückzuführen. Die dadurch hervorgerufenen Spannungen sind jedoch eine Größenordnung kleiner, unterhalb der Elastizitätsgrenze des Realkristalls, ihre Ausdehnung dagegen bemißt sich nach Zentimetern. Zu diesen „makroskopischen“ Spannungen gehören auch die Guß- und Härtespannungen. Auch Aluminiumkristalle zeigen diesen Asterismus (15), wenn sie verzerrt werden, erfahren also ebenfalls makroskopische Spannungen, obgleich ja die in den vorhergehenden Abschnitten besprochenen „mikroskopischen“ elastischen Spannungen bei ihnen nicht auftreten.

§ 4. Gitterbereiche und Gitterkomplex

Es soll jetzt das Bild entworfen werden, das man sich vom Gefüge des verformten Zustands zu machen hat.

a) Die im § 1 untersuchte Aufspaltung der Körner könnte zunächst im Sinne Czochralskis (17) gedeutet werden. Nach seinen Anschauungen soll der größte Teil des Kristallgitters bei der Verformung *vollständig* zerstört werden, nur kleine, für die weiteren Vorgänge belanglose Inseln als Kristalle erhalten bleiben. Diese sollen dann die Röntgeninterferenzen des verformten Zustandes zustande bringen.

In diesem Falle müßte aber der nicht mehr kristalline Teil des Materials einen im Verhältnis zu den Linien sehr starken Schleier verursachen, während in Wirklichkeit dieser Schleier nicht besonders stark, bei gewalztem Aluminium z. B. kaum merkbar ist. Somit besteht der größte Teil eines verformten Metalls aus Gitterbereichen, die sehr wenig deformiert sind.

Auch deren Einzelgröße kann nicht unterhalb der Grenze liegen, welche sich durch eine Verbreiterung der Linien nach Debye-Scherrer bemerkbar machen würde. Der Verfasser hat ja in (2) bewiesen, daß die manchmal wirklich beobachtete Verbreiterung der Debyelinien keine derartige Ursache zu haben braucht. Nach § 3 konnte dann experimentell gezeigt werden, daß jedes verformte Material scharfe Linien haben kann, wenn nur die Verformung geeignet geleitet wurde, daß also die Verbreiterung weder von der Verfestigung, noch von der Verformung abhängt, sondern nur bei einer ganz bestimmten *Art* der Verformung auftritt. So können wir also annehmen, daß im verformten Material bei der überwiegenden Mehrheit der Kristall-

stücke einige Millionen Atome in einem regelmäßigen und gleichgerichteten Gitterverband zusammenhängen.¹⁾

Mit dem Ausdruck Gitterbereich wollen wir stets ein solches Einkristallstück innerhalb des vielkristallinen verformten Metalls bezeichnen, während wir Gitterteil ein kleineres Teilstück eines Bereiches nennen wollen.

b) Als Grenzen dieser Bereiche sind die Gleitebenen zu betrachten, welche durch die Einkristalluntersuchungen kristallographisch festgelegt sind. Denn aus verschiedenen Beobachtungen folgt, daß auch die vielkristallinen Metalle durch Gleitung längs derselben Ebenen und Richtungen sich verformen:

Zunächst haben die in § 1 beschriebenen tiefgreifenden Änderungen des Röntgenbildes der einzelnen Körner ergeben, daß jedes dieser Körner schon bei kleinen Verformungsgraden sich aufspaltet, wie es bei Einkristallen der Fall ist.

Weiter läßt sich sagen, daß diese Aufspaltung längs der bei Einkristallen festgestellten Gleitebenen erfolgt, denn nach Polanyi (l. c.) läßt sich die beobachtete Faserstruktur der vielkristallinen Metalle mittels der Gleitebenenvorstellung wiedergeben.²⁾ Danach ist ja die Faserstruktur diejenige Lage, bei der sich sämtliche möglichen Gleitelemente aller Körner symmetrisch zu der durch die Bearbeitung gegebenen Form des Stücks eingestellt haben, wobei der Winkel der Gleitrichtungen gegen die Richtung der größten Spannung möglichst klein ist. Diese Gleitebenen sind dieselben, wie sie bei Einkristallen gefunden wurden.

Um diese Begrenzung der Bereiche durch Gleitebenen hervorzuheben, werden wir die unter a) definierten Gitterbereiche auch als *Gleittlamellen* bezeichnen.

c) Folgende Gründe berechtigen uns weiter dazu, anzu-

1) Das in § 3 beschriebene Scharfbleiben der letzten Debyelinien bei bestimmten Verformungen ist wohl überhaupt der einzige direkte Beweis dafür, daß sowohl bei Einkristallen wie bei Vielkristallen die Verformung durch diskrete Gleitebenen mit großen Zwischenräumen erfolgt.

2) Vgl. auch F. v. Göler u. G. Sachs, Ztschr. f. Phys. 41. S. 873. 1927. Demgegenüber finden Wever und Schmid bei flächenzentrierten Metallen noch eine zweite Lage, die zunächst nicht mit den Polanyischen Vorstellungen zu erklären ist (Ztschr. f. techn. Phys. 8. S. 398. 1927).

nehmen, daß keine vollständig amorphen Schichten längs der Grenzebenen liegen:

E. Schmid (34) bemerkt, daß amorphe Schichten keinen Bauschinger-Effekt aufweisen würden, d. h. in der Deformationsrichtung sich nicht stärker verfestigen könnten als in der entgegengesetzten. Weiter hat Tammann (10) gezeigt, daß zu einem wirklichen Schmelzen der Metalle bei niedriger Temperatur ganz unvorstellbar hohe Drucke nötig waren. Schließlich ist es überhaupt fraglich, ob eine durch Druckwirkung bei niedriger Temperatur entstandene Metallschmelze von dem Zustand eines stark deformierten kristallinen Metalls sich noch unterscheidet, da Rotationsbewegungen von Molekülen und Molekülkomplexen, die kinetisch die Flüssigkeiten vor den festen Körpern auszeichnen, bei den stets einatomigen reinen Metallen wohl nicht in Frage kommen. Darauf deutet auch die Tatsache hin, daß eine Unterkühlung der Schmelze bei Metallen nie beobachtet wurde. Somit können wir annehmen, daß auch im verformten Metall überall Kristallgitter sich gegenseitig berühren.

d) Wir bezeichnen als Kristallkomplex die Gesamtheit der Gitterbereiche (Gleitlamellen), welche mit mehr oder weniger verschiedener Orientierung aneinander stoßen.

In diesem Komplex breiten sich die bei der Verformung entstandenen *Gitterdeformationen* aus. In (2) wurden nach der Größe der erfaßten Gitterteile folgende zwei Deformationsarten unterschieden:

1. Deformationen, welche sich über einen *ganzen* Bereich annähernd gleichmäßig erstrecken. Das sind die im vorhergehenden betrachteten *elastischen* inneren Verbiegungen und Verzerrungen.

2. Deformationen, welche von den Grenzen zweier Bereiche ausgehen und sich in beide Bereiche hinein, aber nur über einen *Teil* des Innern erstrecken. Im folgenden werden diese Deformationen *Verhakungen* genannt und gittertheoretisch untersucht werden.

In der Auflösung der Deformationen, insbesondere der Verhakungen und der dadurch ermöglichten Vereinigung der Gitterbereiche zu größeren, gleich orientierten Gittern, den „Körnern“, besteht die Rekristallisation.

II. Verlauf der Rekristallisation mit der Zeit und Temperatur

§ 5. Experimentelles

Die bei einem bestimmten Verformungsgrad (18) und einer bestimmten Glühtemperatur sich einstellende Korngröße und Festigkeitsänderung ist noch eine Funktion von *Glühdauer* und *Erhitzungsgeschwindigkeit*.¹⁾

Die Abhängigkeit der Korngröße von der Glühdauer ist in bestimmten Fällen sehr einfach. Hat man nämlich das verformte Metall einmal auf eine bestimmte Glühtemperatur gebracht, so rekristallisiert es in unmeßbar kurzer Zeit (23). Dabei stellt sich *sofort*²⁾ die der Glühtemperatur entsprechende, von der Erhitzungsgeschwindigkeit unabhängige Korngröße ein und bleibt im allgemeinen auch nach einer Glühzeit von einigen Minuten noch unverändert (14). Nach längerem Glühen macht sich ein Vorgang anderer Art bemerkbar, es wachsen jetzt die Körner im Lauf des Glühens bis zu einer gewissen Größe weiter. Man nennt dies *Kornvergrößerung*.³⁾

Bei hohen Temperaturen und gleichzeitig hohen Verformungsgraden ist die primäre (Bearbeitungs-) Rekristallisation von der Kornvergrößerung oft schwer zu trennen; im allgemeinen aber kann man eine so kurze Glühdauer wählen, daß dies möglich ist und dann die sich einstellende Korngröße als Funktion des Verformungsgrades und der Glühtemperatur *allein* betrachten. Diese Funktion nennt man bekanntlich *Rekristallisationsdiagramm* (8, 14, 15.).

Von der Kornvergrößerung zu unterscheiden ist die sekundäre Rekristallisation (22). Sie besteht ebenfalls in einem nachträglichen Kornwachstum. Dieses beschränkt sich aber auf einzelne Körner, so daß ein ganz ungleichmäßiges Gefüge entsteht, das nebeneinander große und kleine Körner enthält. Abweichend von den bisher erwähnten Vorgängen ist die sekundäre

1) H. Hanemann hat außerdem (14) darauf aufmerksam gemacht, daß das von Czochralski vorgeschlagene Rekristallisationsdiagramm nur für Warmverformung ganz eindeutig definiert ist, weil auch die Verformungstemperatur einen gewissen Einfluß hat.

2) Insbesondere bei niedriger Temperatur kann die Kernbildung hinter sonstigen Auswirkungen der Rekristallisation (vgl. S. 750 u. § 17) zurückbleiben, z. B. (38).

3) In (12), (37), (38), (39) wird der erste Vorgang als Bearbeitungsrekristallisation, der zweite als Oberflächenrekristallisation bezeichnet.

Rekristallisation wesentlich von der Vorbehandlung, d. h. von der Bearbeitung und dem Glühen vor der letzten Verformung abhängig (5).

Besonderer Untersuchung bedürfen die *Grenzbereiche* des Rekristallisationsdiagramms. Man nennt Rekristallisationsschwelle den kleinsten Verformungsgrad, bei dem eine Kornneubildung beginnt, untere Rekristallisationsgrenze oder auch Rekristallisationstemperatur diejenige Temperatur, bei welcher im verformten Material die ersten neuen Körner entstehen. Die Rekristallisationstemperatur ist eine Funktion des Verformungsgrades, die Schwelle die dazu inverse der Temperatur, Rekristallisationsschwelle und Temperatur definieren also miteinander eine Grenzkurve des Diagramms (14), welche in der Ebene der Temperatur- und der Verformungsachse liegt.

Diese Grenzen sind nur nach *kurzen* Glühzeiten nachzuweisen. Glüht man einige Stunden und länger, so erhält man auch bei sehr viel tieferer Temperatur neue Körner. So erhielten Glocker und Kaupp (3) nach mehrwöchigem Glühen schon bei 40° Körner bei einem Silber, das eine normale Rekristallisationstemperatur von 150° hat. Dennoch ist die Rekristallisationstemperatur scharf zu definieren. Dies zeigt folgende experimentelle Untersuchung des Verfassers: Ein Silberblech mit 0,3 Proz. Kupfergehalt, das ohne Zwischenglühen um 99,9 Proz. heruntergewalzt war, wurde zunächst bei 200 und 190° 10 Min. geglüht. Die Laueaufnahme des ersteren Stücks zeigte, daß zahlreiche neue Körner vorhanden waren (5), die des zweiten wies keine Andeutung von Körnern auf. Demnach wäre die Rekristallisationstemperatur des Materials bei 200° anzunehmen. Ein weiteres Stück wurde nun 6 Stunden lang bei 190° geglüht. Hier zeigten sich einige wenige Körner. Nach 48stündigem Glühen bei 190° war die Zahl dieser Körner ein wenig vermehrt, aber noch nicht so groß, wie wenn das Blech oberhalb der normalen Rekristallisationstemperatur 10 Min. lang geglüht worden wäre.

Man sieht aus diesem Versuch, daß *oberhalb und unterhalb* der Rekristallisationstemperatur die Kornbildung nach ganz *verschiedenen Zeitgesetzen* verläuft. Ganz ähnliche Verhältnisse fand Czochralski (15) bei der Festigkeitsabnahme und Dehnungszunahme von gewalztem Aluminium, und Siebe (24) bei verschiedenen anderen Metallen.

Somit ist die *Rekristallisationstemperatur* zu definieren als *diejenige Temperatur*, bei der sich die *Geschwindigkeit* der Rekristallisation *sprungweise ändert*.

§ 6. Atomistische Formulierung der Zeitgesetze

Welche atomaren Vorgänge können nun diesem verschiedenen zeitlichen Rekristallisationsablauf zugrunde liegen? Masing (21) hat als erster eine ungefähre Vorstellung davon gegeben. Er hat darauf hingewiesen, daß zwei verschiedene Mechanismen für den der Rekristallisation zugrunde liegenden Spannungsausgleich denkbar sind und hat die Geschwindigkeitsgesetze dieser Mechanismen untersucht. Es sind dies:

a) Rekristallisation mit Kernbildung. An einzelnen Stellen des verformten Gefüges liegen *manchmal*, je nach der statistischen Verteilung der Wärmebewegung, für den Spannungsausgleich besonders günstige Verhältnisse vor. Hier allein sollen sich nun spannungslose Stellen bilden. Sie wirken als Kristallisationskerne¹⁾, an welche sich die neuen Körner in einer zunächst nicht näher zu bestimmenden Art anschließen. Die Kornzahl wird dann von der Glühzeit in derselben Form abhängen wie z. B. die Produkte einer monomolekularen Gasreaktion von der Zeit: Es werden sich um so mehr Körner bilden, je länger geglüht wird. Auch von der Erhitzungsgeschwindigkeit wird die Kornzahl abhängen.

b) Rekristallisation ohne Kernbildung. Sobald eine bestimmte Temperatur erreicht ist, sollen sich *gleichzeitig* alle die Spannungen ausgleichen, welche bei dieser Temperatur nicht mehr bestehen können. Über die Ursache dieser Gleichzeitigkeit macht Masing keine weiteren Vorstellungen. Das Zeitgesetz wird jetzt aber sehr einfach: Die Kornzahl wird unabhängig von der Glühdauer und der Erhitzungsgeschwindigkeit.

Masing selbst entscheidet sich durchweg für den in b) beschriebenen Mechanismus, dagegen zeigen die oben angeführten experimentellen Tatsachen folgendes: Die Kornvergrößerung, wie auch die *Kornbildung unterhalb* der Rekristallisationsgrenze verlaufen wie a), die für das *Rekristallisationsdiagramm* maßgebende primäre Rekristallisation dagegen muß nach b) verlaufen.

1) Diese Kernbildung ist aber jedenfalls etwas ganz anderes als diejenige beim Erstarren einer Schmelze; vgl. dazu S. 785ff.

Die im folgenden zu beschreibenden Verhakungen sind eine Art von inneren Spannungen, welche sich bei niedriger Temperatur nach a), bei höherer Temperatur nach b) ausgleichen. Nimmt man also an, daß durch ihre Auslösung die Rekristallisation eingeleitet wird, so wird verständlich, daß zwei verschiedene Zeitgesetze für diese bestehen können.

III. Allgemeines über die Verhakungen

§ 7. Die Stabilität des verformten Zustands fordert das Bestehen nicht mehr homogener Verzerrungen

Um die auf S. 758 unter 2. genannten Verzerrungen des verformten Zustands, die wir im folgenden Verhakungen nennen wollen, näher festlegen zu können, gehen wir davon aus, daß sie den *verformten Zustand mechanisch stabil* erhalten müssen. Aus dem in § 5 Gesagten geht ja hervor, daß bei sehr niedriger Temperatur keine Kornneubildung mehr anzunehmen ist. Also ist hier jedes Atom im stabilen mechanischen Gleichgewicht, auch wenn die äußeren, verformenden Kräfte nicht mehr vorhanden sind. Auch bei höherer Temperatur, solange die Rekristallisationstemperatur noch nicht überschritten ist, kann eine Auflösung der Spannungen nur dadurch erfolgen, daß bestimmte Atome vermöge ihrer kinetischen Wärmeenergie eine gewisse Energieschwelle der Spannungsenergie überschreiten und von da aus in ein noch tieferes Energieminimum gelangen. Das Gleichgewicht ist daher speziell als *metastabil* zu bezeichnen.

Es ist nun leicht zu sehen, daß eine überall in kleinen Bereichen *homogene* Deformation ohne äußere Kräfte niemals stabil sein kann; als *homogene Deformation* bezeichnet Born¹⁾ eine solche, bei der in mehrere Atomdimensionen umfassenden Bereichen die Verrückung jedes Atoms angenähert eine lineare Funktion des Ortes ist, also

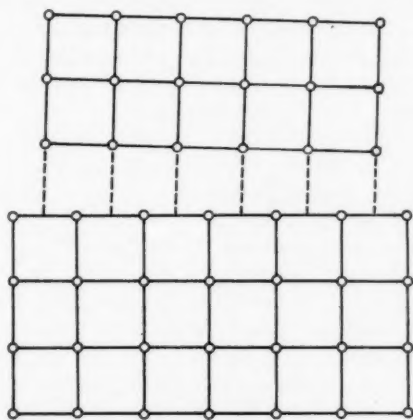
$$\Delta x_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\partial u}{\partial x} x_{n_1, n_2, n_3}^0 + \frac{\partial u}{\partial y} y_{n_1, n_2, n_3}^0 + \frac{\partial u}{\partial z} z_{n_1, n_2, n_3}^0,$$

wo die $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ konstant bzw. langsam veränderliche Funktionen sind. Dabei wollen wir den ganzen Kristallkomplex ins Auge fassen und die Verrückungen vom verzerrungslosen Zustand x_{n_1, n_2, n_3}^0 aus rechnen. Born hat gezeigt, daß unter Annahme

1) Enzyklop. d. math. Wiss. V.

solcher homogener Deformationen die Gleichgewichtsbedingungen des Kristallgitters in die Elastizitätsgleichungen der Kontinuumsstheorie übergehen. Diese haben bekanntlich ohne äußere Kräfte nur die Lösung Null.

Es ist also nicht möglich, daß Gitterbereiche überall etwa nach Art der Fig. 4 gleichmäßig aneinandergrenzen, sondern zur



Grenze zweier Gleitlamellen ohne Verhakungen

Fig. 4

Erklärung der Stabilität des verformten Zustandes ohne äußere Kräfte sind Deformationen anzunehmen, die an einzelnen Stellen nicht mehr homogen sind.¹⁾

§ 8. Zustandekommen und Nachweisbarkeit der Verhakungen

Nach § 4 nehmen wir an, daß solche Inhomogenitätsstellen an den Grenzen der Gleitlamellen liegen. Auf folgende Art kann man sich veranschaulichen, wie sie durch die Gleitung zustande kommen. Wenn zwei Atomreihen aneinander vorbeigezogen werden, so können einzelne Atome infolge irgendwelcher Unregelmäßigkeiten in den Gleitebenen gegenüber den anderen zurückbleiben und sich schließlich im Anziehungsbereich eines

¹⁾ Ohne weiteren Beweis erwähnt die Notwendigkeit einer unstetigen Verteilung G. Sachs, Mech. Technolog. d. Metalle. S. 219.

anderen gegenüberliegenden Atoms befinden, als einer normalen Lage entsprechen würde. So kommt das zustande, was wir im folgenden eine *Verhakung* nennen wollen, eine Vorstellung, die wohl zuerst Prandtl eingeführt hat (40).

Polanyi¹⁾ hat darauf hingewiesen, daß ein solches Überschnappen der einzelnen Atome eintreten müßte, wenn zwei gebogene Gleitlamellen aneinandergrenzen, wie es während des Gleitens der Fall ist. Ob eine Verbiegung zum Zustandekommen der Verhakung notwendig ist und ob diese nicht auch durch reine Gleitung entstehen können, könnte wohl durch Versuche an Einkristallen entschieden werden.

Daß die hauptsächlichen Spannungen längs der Gleitebenen auftreten, konnte bei Steinsalz dadurch nachgewiesen werden, daß an diesen Stellen eine optische Doppelbrechung zu beobachten ist (20). Bei Metallen haben wir bisher kein Mittel, sie direkt nachzuweisen, da die Verhakungen nur in verhältnismäßig kleinen Teilbereichen des Gitters zu größeren Deformationen führen. Demgemäß läßt sich auf sie die in (2) ausgeführte Rechnung anwenden: Wenn auch die Einzelformen der Deformationen andere sind, so wird doch das Hauptergebnis für solche nur teilweise deformierten Gitter anzuwenden sein, daß nämlich der *Beitrag* dieser Bereiche zur *Umgebung* der *scharfen* Röntgenlinie infolge der Zerstreuung auf einen *großen* Winkelbereich sehr klein ist, daß sie also die vom ungestörten Gitterteil gelieferte scharfe Linie nicht zu verbreitern vermögen.²⁾

§ 9. Verfestigung

Wir haben noch zu untersuchen, welche Rolle die der Gleitung und Verfestigung zugrunde liegenden Gitterstellen, also das, was Smekal (13) als Lockerstellen bezeichnet, in unseren Verhakungen spielen.

Phänomenologisch scheint kein direkter Zusammenhang zwischen der mit der Kaltverformung verbundenen Verfestigung und der auf die Kaltverformung folgenden Rekristallisation zu bestehen. So kann die Verfestigung zweier Metalle sehr ver-

1) M. Polanyi, *Ztschr. f. Metallk.* **17**. S. 94. 1925; siehe auch den zusammenfassenden Bericht von E. Schmid (34).

2) Dagegen setzen sie die Gesamtintensität der Linie herab. Dies wurde experimentell bestätigt von H. Mark u. G. Hengstenberg, *Naturw.* **17**. S. 443. 1929.

schieden sein, deren Rekristallisation in ganz ähnlicher Weise verläuft. Auch G. Sachs (28, 30) kommt bei der Beobachtung der Rekristallisation großer Aluminiumkristalle zu dem Schluß, daß ihr Verlauf nicht von der an einer bestimmten Stelle bestehenden Verfestigung, sondern von der dort bestehenden Verbiegung abhängt.

Folgende gittertheoretische Überlegungen zeigen nun direkt, daß die das Gleiten einleitenden „Lockerstellen“ gerade dann verschwunden sein müssen, wenn sich die Verhakungen ausgebildet haben¹⁾:

Jede Theorie der Verfestigung muß zunächst erklären, warum überhaupt sich diskrete Gleitebenen bilden. Denn der Widerstand gegen Schub längs der Gleitebene muß stets, auch nach der Verfestigung, kleiner sein als der Schubwiderstand des übrigen Kristallgitters, wenn die Gleitung immer längs derselben Gleitebene vor sich gehen soll. Dies kann aber nach dem in § 3 und 4 Bemerkten als experimentell gesichert gelten. Somit muß jede Theorie der Verfestigung ausgehen von einem örtlichen Faktor, der an bestimmten Stellen den Schubwiderstand des Gitters *verringert*. So muß z. B. R. Becker in seiner allerdings nur kurz wiedergegebenen Theorie der Plastizität²⁾ voraussetzen, daß eine bestimmte Stelle im Kristall zur Gleitebenenbildung prädestiniert ist. Die zwischen derartigen Stellen auftretenden thermischen Schwankungen bringen dann an diesen einen Gleitvorgang zur Auslösung. Smekal³⁾ nennt den örtlichen Faktor Lockerstelle und bringt ihn in Zusammenhang mit anderen Kristalleigenschaften. Die Verfestigung besteht dann darin, daß die Lockerstellen im Verlauf der Gleitung *unwirksam* gemacht

1) A. Smekal scheint früher dieser Ansicht gewesen zu sein (Ztschr. f. techn. Phys. 7. S. 535. 1926). Er hat sie jedoch aufgegeben (13), veranlaßt durch die experimentelle Beobachtung, daß in verformtem Steinsalz sich eine größere Anzahl von Lockerstellen durch Verfärbung bemerkbar macht als in unverformtem. Nun sind aber die Verhakungen in bezug auf die Verfärbung ebenfalls als Lockerstellen anzusehen. Bestimmte Atome darin sind nämlich lockerer durch die andern gebunden als normale Gitteratome. Daß die in seinen Versuchen nachgewiesenen Lockerstellen in bezug auf Festigkeitswirkungen sich ganz verschieden verhalten können, hat Smekal bisher nicht diskutiert.

2) R. Becker, Phys. Ztschr. 26. S. 919. 1925.

3) A. Smekal, Verh. d. dtsh. Phys. Ges. 6. S. 50. 1925; Ann. d. Phys. 83. S. 1202. 1927.

werden. Je stärker also das Metall verformt ist, desto weniger „Gleitlockerstellen“ sind vorhanden, dafür hat sich in noch größerer Zahl eine *andere Art* von „Lockerstellen“ ausgebildet, nämlich die Verhakungen.

Diese zweite Art von Lockerstellen glauben wir im Prinzip als mechanische, wenn auch nicht mehr homogene Verzerrungen eines Bornschen Gitters darstellen und durchrechnen zu können, was für Lockerstellen der ersten Art noch nicht versucht wurde.

§ 10. Das ideale Gitter gegenüber der experimentellen Erfahrung

Wir definieren nun als „ideales Gitter“ einen vielkristallinen Komplex, in welchem der oben gekennzeichnete, das Gleiten einleitende Faktor, die „Gleitlockerstellen“, nicht vorhanden sind.

Alle Berechnungen mechanischer Eigenschaften von Kristallen beziehen sich auf dieses ideale Gitter. Es zeigt sich aber, daß alle tatsächlich gemessenen Festigkeitswerte weit unter den berechneten liegen.

Die theoretisch zu fordernde Zerreißfestigkeit wurde von Polanyi¹⁾ aus der Oberflächenspannung, die allerdings nur in flüssigem Zustande gemessen werden konnte, abgeschätzt. Sie ist ungefähr 100mal größer als die bei Metallen beobachtete.

Weiter hat F. Frenkel²⁾ die Schubfestigkeit in Beziehung zum Torsionsmodul gebracht. Er kann durch eine Madelungsche Summierung der einzelnen Atomkräfte, welche er durch ein Coulombsches Glied in Verbindung mit einem allgemeinen Potenzglied darstellt, die längs einer Netzebene wirkende periodische Kraft berechnen. Danach besteht die Beziehung

$$f_{\max} = \frac{G}{2\pi} \sqrt{\frac{1+\mu}{2+\mu}},$$

wo G der Torsionsmodul, μ die Poissonsche Konstante und f_{\max} die größte Kraft bedeutet, die nötig ist, um ein Atom, das einem unendlichen Halbgitter gegenübersteht, aus dem Bereich

1) Vgl. G. Masing u. M. Polanyi, *Erg. d. exakt. Naturw.* 2. S. 177. 1923.

2) F. Frenkel, *Ztschr. f. Phys.* 37. S. 572. 1926.

eines Atomes in den des benachbarten zu bringen. Diese Kraft ist nötig, um die Atome an der Netzebene entlang zu schieben und ist daher als Schubfestigkeit im idealen Gitter anzusehen. Wie aus den Werten der Tab. 1 hervorgeht, ist sie mehr als 10 mal größer als die bei Zerreiversuchen erreichte maximale Schubfestigkeit und mehr als 50 mal größer als die Anfangsschubfestigkeit.

Dennoch lät sich zeigen, da bei sehr starker Verfestigung aus den experimentellen Messungen ein Wert für die Schubfestigkeit extrapoliert werden kann, der dem theoretisch berechneten nahekommt, und zwar um so mehr, bei je tieferer Temperatur der Zerreiversuch vorgenommen wird. Nach F. Körber¹⁾ kann man nämlich die auf wahre Spannung und Querschnittsverminderung bezogene, an der Zerreimaschine aufgenommene Zugkurve geradlinig bis auf die Querschnittsverminderung $q = 100$ Proz. extrapolieren. Die hier erreichte wahre Spannung σ_0 hängt nun erfahrungsgemä nicht mehr vom anfänglichen Bearbeitungszustand des Materials ab. Alle Kurven für verschieden vorbehandeltes Material gehen durch denselben Punkt und im Vergleich mit den aus der Gleichung 1 berechneten erhält man folgende Werte von σ_0 :

Tabelle 1

| | G kg/mm ² | μ | f_{\max} kg/mm ² | σ_0 kg/mm ² |
|----------|---------------------------|-------|----------------------------------|----------------------------------|
| Cu | 3900—4800 | 0,34 | 520 | 63 |
| Ag | 2500—2900 | 0,37 | 330 | 36 |
| Al | 2300—2700 | 0,33 | 320 | 26 |

Nun hängen aber die Werte von σ_0 noch von der Zerreigeschwindigkeit ab. Je größer diese ist, desto höher liegen sie.²⁾ Es ist also nicht ausgeschlossen, da bei sehr großer Zerreigeschwindigkeit, oder was dasselbe ist, bei sehr tiefer Zerreitemperatur die Endfestigkeit den theoretisch berechneten Wert erreichen kann. Damit wären also experimentell gemessene Festigkeits-

1) F. Körber u. W. Roland, Mitt. d. K. W.-Instituts f. Eisenforschung 5. S. 37. 1924; vgl. auch G. Sachs, Mech. Technol. d. Metalle S. 27. Nach G. Sachs u. W. Fiek, „Der Zugversuch“, sind die extrapolierten Werte von Verunreinigungen der Metalle stark abhängig.

2) Vgl. G. Sachs, a. a. O., S. 28.

werte in Beziehung zur Elastizitätskonstanten gebracht. Diese sind ja weitgehend unabhängig vom Verformungsgrad und zeigen damit an, daß sie sich auf den idealen Gitterverband des Metalls beziehen.

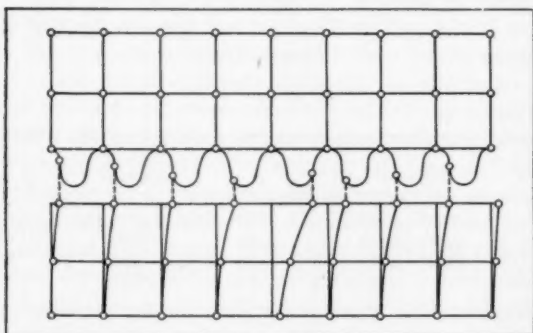
So erscheint als Ergebnis dieses Abschnittes die Aufgabe, die Rekristallisationsvorgänge als Wirkungen der Kräfte im idealen, deformierten Kristallgitter darzustellen, insbesondere die Rekristallisationstemperatur in Verbindung mit den Elastizitätskonstanten zu bringen.

IV. Das Gleichgewicht der Verhakungen

§ 11. Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen

Wir stellen nun die Bedingungsgleichungen dafür auf, daß ein an der Grenze zweier Gitterbereiche in einer Verhakung befindliches Atom im mechanischen Gleichgewicht ist.

a) Wir machen dabei dieselben Annahmen für die auf das Atom wirkenden *Kräfte*, die Prandtl bei seinen Untersuchungen



Eine Verhakung

Fig. 5

über die elastische Hysterese benutzt hat¹⁾ (40). Danach übt ein den ganzen Halbraum erfüllendes Kristallgitter auf ein Atom, das ihm gegenübersteht, eine Kraft aus, die eine *periodische Funktion* des Orts ist (in der Fig. 5 ist ihr Potential angedeutet).

1) Der Verfasser wurde auf diese Arbeiten erst aufmerksam, als der wesentliche Teil seiner Überlegungen schon fertiggestellt war.

Als einfachste mathematische Form dafür nehmen wir eine Sinusfunktion.¹⁾ Der zweite Halbraum, zu dem das betrachtete Atom selbst gehört, soll auf dieses eine einfache elastische Kraft ausüben. Wir beschränken uns auf Verrückungen in einer Richtung.

b) Wie Prandtl rechnen wir so, als ob das obere Halbgitter gar nicht verzerrt würde. Dieser Zustand ist in Wirklichkeit nicht im Gleichgewicht, sondern das obere Gitter wird nach der entgegengesetzten Richtung ebenfalls verzerrt werden. Wir denken uns dann eine auf beide Gitter gleichzeitig wirkende Zusatzkraft, welche die Verzerrung des einen Gitters auf Null zurückführt, aber die Gleichgewichtsbedingungen eines Atoms nicht ändert. Somit wird die später berechnete Verzerrung des unteren Gitters annähernd das Doppelte der tatsächlich auftretenden sein.

c) Wenn wir das periodische Potential ansetzen als

$$(1) \quad \Phi = A \sin^2 \pi \frac{Ax_n}{s},$$

wo s der Abstand der Atome in der Gleitrichtung ist und die Konstante der elastischen Kraft mit C bezeichnen (statt $A_n x/s$ wollen wir y_n schreiben), so werden die Gleichgewichtsbedingungen

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} - C s (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) = 0,$$

also

$$\frac{\pi A}{s} \sin 2\pi y_n - C (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) = 0.$$

Dabei haben die Ausdrücke $\pi A/s$ und C die Dimensionen von Kräften, können also in dyn gemessen werden.

§ 12. Zahlenwerte der Konstanten

Es sind nun die Zahlenwerte für die Konstanten A und C zu bestimmen. Grundsätzlich könnten diese durch Summation über die von den einzelnen Atomen herrührenden Kräfte gefunden werden, jedoch ist bei den Metallen heute noch darüber sehr wenig bekannt. Auch die von Grüneisen²⁾ durchgeführten

1) Diese Form hat in polaren Gittern W. Braunbeck (Ztschr. f. Phys. 38. S. 549. 1926) zu Betrachtungen über den Schmelzpunkt der Kristalle verwandt.

2) Handbuch der Physik X.

Ansätze können bei Metallen nur die Kompressibilität und ihre Temperaturabhängigkeit wiedergeben, bei deren Berechnung ein Teil des Kraftgesetzes herausfällt. Eine absolute Berechnung der anderen Elastizitätsgrößen ist noch nicht ausführbar. So ist der einzige mögliche Weg, die von uns eingeführten Konstanten mit anderen meßbaren Größen in Beziehung zu bringen. Nach den Überlegungen des § 10 kommen dafür die Elastizitätsmoduln in Betracht.

a) Die maximale Kraft, die nötig ist, um ein Atom längs des oberen Halbgitters vorbeizuschieben, ist in unserer Rechnung

$$\frac{\pi A}{s}.$$

Liegen n -Atome auf der Flächeneinheit der Gleitebene, so ist die Kraft pro Flächeneinheit, die nötig ist, um zwei Teilgitter aneinander vorbeizuschieben:

$$f_{\max} = \frac{\pi A}{s} n.$$

Diese Kraft setzen wir der in § 10 von Frenkel übernommenen maximalen Schubfestigkeit gleich. Dabei ist zu beachten, daß Frenkel bei der Berechnung seiner Formel:

$$f_{\max} = \frac{G}{2\pi} \sqrt{\frac{1+\mu}{2+\mu}}$$

annimmt, daß das vorbeigeschobene Atom auch senkrecht zur Gleitebene ausweichen kann. Wenn das nicht möglich ist, wie das bei unseren Rechnungen vorausgesetzt ist, wo ja nicht alle Atome einer Halbebene gleichzeitig, sondern nur eines in ihrer Mitte sich bewegt, so ist nach Frenkel $\mu = \infty$ zu setzen, also:

$$f_{\max} = \frac{G}{2\pi}$$

und

$$(3) \quad A = \frac{G}{2\pi^2} \cdot \frac{s}{n},$$

wo bei flächenzentrierten Metallen mit der Richtung [110] als Gleitrichtung

$$s = \frac{a}{2} \sqrt{2}, \quad n = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$$

zu setzen ist, wenn a die Würfelkante der Kristallstruktur ist.

b) Die Größe C berechnen wir direkt aus dem Elastizitätsmodul M . K sei die Tangentialkraft, die nötig ist, um einen

die ganze Halbebene umfassenden Block um den Betrag ε zu dehnen¹⁾, wenn eine zweidimensionale Spannungsverteilung angenommen wird. Dann ist:

$$K = \frac{s M}{2}.$$

Nach unserer Rechnung ist diese Kraft:

$$K = C n \varepsilon.$$

Es ist also:

$$(4) \quad C = \frac{M}{2n}.$$

c) Die Konstante c wird auf S. 772 definiert durch:

$$c = \frac{2\pi^2 A}{s G}.$$

Sie wird daher:

$$(5) \quad c = 2 \frac{G}{M} = \frac{1}{1 + \mu}.$$

Setzen wir nun die aus Landolt-Börnstein entnommenen Elastizitätskonstanten der reinen, verformten Metalle bei Zimmertemperatur ein, so erhalten wir:

Tabelle 2

| | G kg/cm ² | μ | c | A erg · 10 ⁻¹³ | s cm · 10 ⁻⁸ | $1/n$ cm ² · 10 ⁻¹⁶ |
|----------------------|---------------------------|-------|------|--------------------------------|------------------------------|--|
| Al..... | 272000 | 0,343 | 0,75 | 1,81 | 2,85 | 4,71 |
| Cu..... | 464000 | 0,348 | 0,74 | 2,24 | 2,54 | 3,75 |
| Ag..... | 294000 | 0,379 | 0,72 | 2,07 | 2,88 | 4,81 |
| Au..... | 282000 | 0,420 | 0,70 | 1,94 | 2,86 | 4,75 |
| Pb..... | 78000 | 0,44 | 0,69 | 0,4 | — | — |
| Fe ²⁾ ... | 734000 | 0,247 | 0,80 | 3,5 | — | — |

§ 13. Die Energieschwelle einer Verhakung

Wir versuchen, die Gleichgewichtsbedingungen (2) zunächst für den Fall zu lösen, daß in einer Atomreihe nur an einer Stelle eine Verhakung besteht, die übrigen Atome aber

1) Den Ansatz dazu siehe z. B. bei A. Nádai, Elastische Platten. 1925. S. 228.

2) Nach den Messungen von Cl. Schäfer an reinen Metallen, zitiert nach Landolt-Börnstein (5. Aufl.). Bei Pb und Fe sind die Gleitrichtungen noch nicht eindeutig bestimmt.

nicht über den Rücken des sinusförmigen Potentials gekommen sind.

Dann sind als Randbedingungen einzuführen: y ist groß nur an einer Stelle, die wir mit $n = 0$ bezeichnen. Außerdem:

$$y = 0 \text{ für } n = \pm \infty.$$

In einem Abstand von der Verhakungsstelle gehen also die beiden Halbgitter geradlinig ineinander über. Wir haben daher ein einziges Gitter vor uns, in dessen Innern eine Verzerrung auftritt. Physikalisch wird sich dieser Fall als für uns bedeutungslos herausstellen, dagegen wollen wir an seine mathematische Diskussion die Berechnung des uns hauptsächlich interessierenden Falles mehrerer Verhakungen anknüpfen.

Die Gleichung (2) unterscheidet sich von allen bisher bei Rechnungen an Punktreihen untersuchten dadurch, daß die Kraft von den Verrückungen selbst abhängig ist und daß diese Abhängigkeit räumlich periodisch ist.

Exakt ist eine derartige, nicht lineare Differenzengleichung wohl nicht zu lösen. Im Gang einer Annäherungsrechnung wollen wir von den zwei Grenzbedingungen ausgehen und von $n = 2$ ab y als so klein annehmen, daß wir den Sinus mit dem Argument vertauschen können. Dann erhalten wir die Gleichung:

$$(6) \quad y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = \frac{2\pi^2 A}{sC} y_n.$$

Diese Gleichung gibt das Überschnappen nicht mehr wieder und es ist deshalb keine wesentlich weitergehende Vernachlässigung, wenn wir die Differenzengleichung durch die Differentialgleichung ersetzen. Diese wird, wenn $\frac{2\pi^2 A}{sC} = c$ gesetzt wird:

$$(7) \quad \frac{d^2 y}{dn^2} = c y.$$

Ihr Integral ist:

$$y = a e^{\pm V^{c \cdot n}} + \text{Const.}$$

Durch die Bedingung im Unendlichen bestimmt sich:

$$\text{Const.} = 0$$

und

$$\text{für } n > 0 \text{ wird } y = a e^{-V^{c \cdot n}},$$

$$\text{für } n < 0 \text{ wird } y = a e^{+V^{c \cdot n}}.$$

Die Konstante a ist so zu wählen, daß für $n = 1$, $y = y_1$ und für $n = -1$, $y = y_{-1}$ wird, welche nachher aus den Gleichungen für y_0 bestimmt werden müssen.

Also wird:

$$(8) \quad \begin{cases} y = y_1 e^{-V^c(n-1)} \\ \text{bzw. } y = y_{-1} e^{V^c(n-1)}. \end{cases}$$

Damit werden die Gleichungen für y_0 :

$$(9) \quad \begin{cases} y_{-2} - 2y_{-1} + y_0 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_{-1}, \\ y_{-1} - 2y_0 + y_1 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_0, \\ y_0 - 2y_1 + y_2 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_1. \end{cases}$$

Aus (8) bestimmt sich:

$$y_2 = y_1 e^{-V^c}, \quad y_{-2} = y_{-1} e^{-V^c}.$$

Damit werden die Gleichungen (9):

$$(10) \quad \begin{cases} y_{-1}(e^{-V^c} - 2) + y_0 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_{-1}, \\ y_{-1} - 2y_0 + y_1 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_0, \\ y_0 - (2 - e^{-V^c})y_1 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_1. \end{cases}$$

Man sieht, daß eine symmetrische Lösung mit $y_{-1} = y_{+1}$ möglich ist. Damit wird:

$$(11) \quad \begin{cases} \text{I} & y_0 - (2 - e^{-V^c})y_1 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_1, \\ \text{II} & 2(y_1 - y_0) = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen löst man am einfachsten graphisch (Fig. 6). Wir tragen auf zwei Achsen y_1 und y_0 auf und zeichnen die beiden Funktionen:

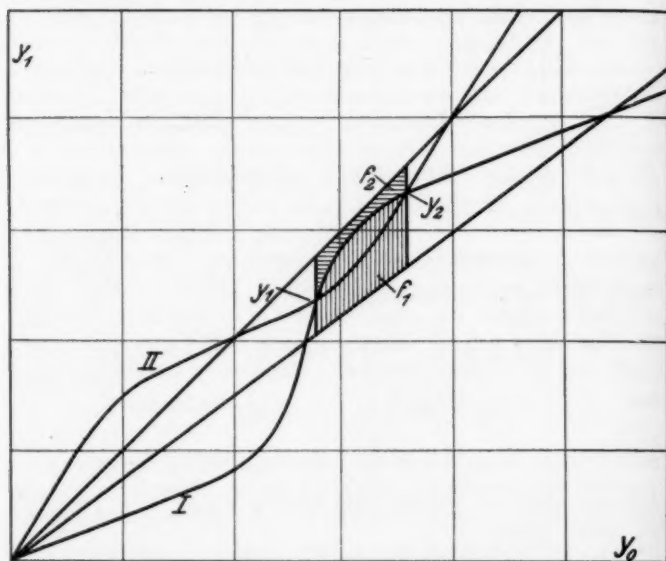
$$\text{I} \quad y_0 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_1 + (2 - e^{-V^c})y_1,$$

$$\text{II} \quad y_1 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_0 + y_0.$$

Ihre Schnittpunkte sind Lösungen der Gleichungen (11). Wir erhalten im allgemeinen zwei Schnittpunkte, von welchen wir

den mit kleineren Werten der y_1 und y_0 mit y_1 , den anderen mit y_{II} bezeichnen wollen.

Wir haben nun die Energie zu berechnen, welche nötig ist, um das Atom $n = 0$ von der Lage II zur Lage I zu bringen. Dabei soll die die äußere Arbeit leistende Kraft nur auf dieses eine Atom wirken, die übrigen Atome aber mitgehen. Auf dem ganzen Weg soll also die Gleichung (11, I) erfüllt sein, welche



Graphische Lösung der Gleichungen (11) und (12)

Fig. 6

die Gleichgewichtsbedingung für das Atom $n = 1$ und alle übrigen Atome außer $n = 0$ bei beliebigen Werten von y_0 darstellt, (11, II) dagegen nicht. Diese Energie wird:

$$(12) \quad E = \int_{y_0^I}^{y_0^{II}} A \pi \sin 2\pi y_0 dy_0 - 2Cs \int_{y_0^I}^{y_0^{II}} (y_1 - y_0) dy_0.$$

Nun ist in unserer graphischen Bestimmung von y_1 und y_{II} der Inhalt der in Fig. 6 schraffierten Flächen:

$$f_2 = \int_{y_0^I}^{y_0^{II}} (y_1 - y_0) dy_0,$$

$$f_1 = \frac{c}{4\pi^2} \int_{y_0^I}^{y_0^{II}} \sin 2\pi y_0 dy_0,$$

wobei der Punkt y^I mit den Koordinaten $y_0 y_1$ sich längs der Kurve I bewegt.

Wenn wir also den Wert für c einsetzen, so wird:

$$f_2 - f_1 = \int_I^{II} (y_1 - y_0) dy_0 - \frac{A}{2sC} \int_I^{II} \sin 2\pi y_0 dy_0$$

und es wird die Energie E proportional dem Flächenstück zwischen den beiden Kurven:

$$E = 2Cs(f_1 - f_2).$$

Wir können somit durch graphische Integration E berechnen.

Ebenso kann die Energie E' bestimmt werden, welche nötig ist, um das Atom $n = 0$ von y_1 zur Lage $y = 0$ zu bringen. Wie man sieht, wird E' stets negativ, d. h. das Atom fällt von selbst von y_1 nach $y = 0$. Dagegen wird bei genügend großen Werten von c die Energie E positiv, also es muß Arbeit aufgewandt werden, um das Atom von y_{II} nach y_I zu bringen. Da ein weiterer Schnittpunkt nicht vorhanden ist, stellt in diesem Falle y_{II} eine stabile, y_I eine labile Gleichgewichtslage vor. Wir können somit E als Energieschwelle bezeichnen, welche nötig ist, um die Verhakung aufzulösen.

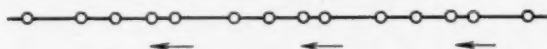
Man sieht leicht, daß bei den tatsächlich einzusetzenden Zahlenwerten der Konstanten c die Kurven sich nicht schneiden, also der von uns bisher betrachtete Fall einer Verhakung nicht realisierbar ist.

§ 14. Gegenseitige Stabilisierung mehrerer Verhakungen

Nun betrachten wir den Fall, daß mehrere Verhakungen nebeneinander bestehen. Wir nehmen an, daß alle denselben Richtungssinn haben, wie es ja nach § 8 verständlich ist, wenn die Verhakungen durch eine Gleitung zustande gekommen sind (vgl. Fig. 7).

Jetzt gibt es keine Stellen mehr, an welchen die zwei Halbgitter ohne Verschiebung ineinander übergehen, sondern durch

die Reihe nebeneinander liegender Verhakungen sind die beiden Gitterhälften vollständig voneinander getrennt und im allgemeinen parallel gegeneinander verschoben. Die Gleichungen (11) stellen die Bedingung dafür auf, daß diese Gitterhälften trotzdem gegenseitig im Gleichgewicht sind.



Mehrere Verhakungen derselben Richtung

Fig. 7

Für die Berechnung müssen wir annehmen, daß die Verhakungsstellen längs einer Punktreihe *gleichmäßig* verteilt sind. Dann werden die Randbedingungen für Gleichung (2):

y hat dieselben Werte für $\pm n = 0, s, 2s \dots$

Wir behandeln wieder die Strecken von $n = 2$ bis $n = s - 2$ mit der Differentialgleichung (7). Mit der Bedingung, daß

für $n = 1$ und $n = s - 1$

$$y = y_1$$

sein soll, wird ihre Lösung jetzt:

$$(13) \quad y_2 = y_1 \frac{\sin \left[\sqrt{c} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]}{\sin \left[\sqrt{c} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \right]}.$$

Damit erhält man für eine symmetrische Lösung, also $y_1 = y_{-1}$ statt der Gleichungen (11):

$$(14) \quad \begin{cases} \text{I} & y_1 \left(\frac{\sin \sqrt{c} \left(2 - \frac{s}{2} \right)}{\sin \sqrt{c} \left(1 - \frac{s}{2} \right)} - 2 \right) + y_0 = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_1, \\ \text{II} & 2(y_1 - y_0) = \frac{c}{2\pi} \sin 2\pi y_0. \end{cases}$$

Um einen Überblick über den Verlauf dieser Gleichungen mit s zu bekommen, überlegen wir uns, daß für großes s die Gleichungen (14) in die Gleichungen (11) übergehen müssen. Wir entwickeln daher die Funktion:

$$(15) \quad \varphi(s) = \frac{\operatorname{Ein} \sqrt{c} \left(2 - \frac{s}{2}\right)}{\operatorname{Ein} \sqrt{c} \left(1 - \frac{s}{2}\right)}$$

nach Potenzen von:

$$(16) \quad d = \frac{2}{s}.$$

So wird:

$$(17) \quad q(s) = e^{-\sqrt{c}} + \frac{2}{s} \sqrt{c} \operatorname{Eof} \sqrt{c} + \dots$$

Man sieht aus den Gleichungen (14) und (15) gegenüber dem Fall einer Verhakung, wie durch benachbarte Verhakungen die zwei Kurven, deren Schnittpunkt die Lösung liefert, näher zusammenrücken, dadurch die Werte von y_I und y_{II} weiter auseinander rücken und die Energiedifferenz größer wird.

Aus einer graphischen Abschätzung ergibt sich, daß für $c = 0,75$ bei ungefähr $s = 10$ die zwei Kurven I und II sich berühren, also noch keine Energieschwelle besteht, und daß bei $s = 5$ schon eine positive Schwellenenergie vorhanden ist, deren Größe ungefähr $4 \cdot 10^{-14}$ erg ist.

Eine genaue Berechnung der Änderung der Schwellenenergie mit s ist graphisch möglich. Es wird sich aber zeigen, daß man zahlenmäßige Resultate nicht verwerten kann, deshalb wurde darauf verzichtet.

Für die weiteren Untersuchungen ist ausschlaggebend, daß die Schwellenenergie mit wachsender Dichte der Verhakungen zunimmt. Anschaulich läßt sich dies so einsehen:

Aus Fig. 7 ist ersichtlich, daß jede Verhakung einen Richtungssinn hat, daß also durch eine irgendwo auftretende Verhakung jedes Atom der ganzen Reihe in derselben Richtung aus seiner früheren Lage verrückt wird. Das ist auch der Fall, wenn in die Nähe einer schon bestehenden Verhakung eine weitere derselben Richtung zu liegen kommt. Man kann sich also vorstellen, daß mit jeder neu hinzukommenden Verhakung auf die schon verhakten Atome und ihre Nachbarn eine Zusatzkraft einwirkt, welche die Verhakung zu vergrößern sucht. Die Bewegung des Atomes vom stabilen zum labilen Gleichgewichtszustand geht aber immer nach kleineren Verrückungen zu, somit entgegen der Zusatzkraft. Daher ist gegen die Zusatzkraft bei der Auflösung der Verhakung eine Arbeit zu leisten, welche die Energieschwelle erhöht.

V. Der Einfluß der Temperatur auf die Verhakungen

§ 15. Erklärung der Rekristallisation oberhalb und unterhalb des Instabilitätspunktes

Das Endergebnis der vorhergehenden Rechnungen ist: Die zum Beseitigen einer einzelnen Verhakung notwendige Energie nimmt mit $d = \frac{2}{g}$ zu, ist also um so größer, je dichter die Verhakungen aufeinanderfolgen. Wenige Verhakungen können nicht bestehen, erst von einem bestimmten d ab wird die Energie positiv. Mit dieser gegenseitigen Stabilisierung löst sich das in § 7 aufgestellte Problem.

a) Gehen wir von einer bestimmten Zahl von Verhakungen aus, welche das Ergebnis eines Gleitungsvorgangs sind, und erwärmen wir das Metall, so haben zunächst nach der Maxwell'schen Energieverteilung nur einige wenige Atome die kinetische Energie, die nötig ist, um eine Verhakung aus dem Verband aller zu lösen. Die Zahl dieser Atome wird um so größer werden, je längere Zeit wir das Metall auf einer bestimmten Temperatur halten. So entstehen die in § 5 beschriebenen *diffusionsartigen* Vorgänge.

b) Ganz anders wird es aber, wenn ein größerer Teil der Atome eine solche kinetische Energie besitzt. Dann verschwindet *auf einen Schlag* die Energieschwelle und sämtliche Verhakungen lösen sich sofort auf. Die Temperatur, bei der dies eintritt, wollen wir *Instabilitätspunkt* nennen.

c) Auf einem formal ähnlichen Vorgang beruht nach der Weißschen Theorie¹⁾ der Übergang eines magnetisierten Stahlstücks in den unmagnetischen Zustand beim *Curiepunkt*. (Umwandlung von α - in β -Eisen.) Auch hier stabilisieren sich die einzelnen Magnetonen gegenseitig in ihrer Richtung²⁾, nur ist hier der Zustand unterhalb des Curiepunktes vollständig stabil, d. h. ein einzelnes Magneton ist in der dem Feld entgegengesetzten Richtung nur im labilen Gleichgewicht. Bei uns ist der Zustand der Verformung unterhalb des Instabilitätspunktes nur metastabil, d. h. ein einzelnes Atom muß zwar eine Energie-

1) Vgl. z. B. E. Stoner, *Magnetism and Atomic Structure*. 1926.

2) Es ist interessant, daß auch bei der elastischen Hysterese eine derartige formale Ähnlichkeit mit ferromagnetischen Erscheinungen auftritt (40). — Auf einen Zusammenhang der Umwandlung von β -Messing mit dem ferromagnetischen Zustand weist hin C. Johansson, *Ann. d. Phys.* 86. S. 291. 1928.

schwelle überwinden, gelangt dann aber auf eine tiefere Energiestufe. Wenn wir genügend lange glühen, wird sich bei jeder Temperatur der endgültige Gleichgewichtszustand, d. i. der rekristallisierte Zustand, einstellen. So entstehen bei verformtem Metall, *im Gegensatz* zur Weißschen Theorie, die Erscheinungen *unterhalb* des Instabilitätspunktes.

§ 16. Thermodynamische Bestimmung des Instabilitätspunktes

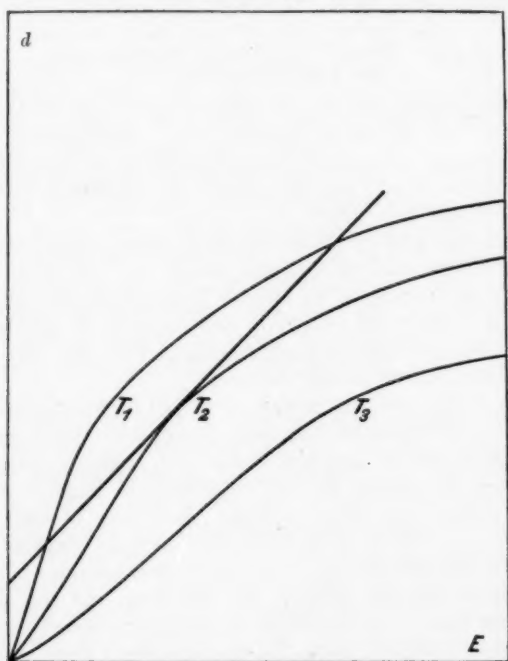
Infolgedessen müßte die genaue thermodynamische Behandlung den zeitlichen Verlauf stets berücksichtigen, also thermokinetisch vor sich gehen. Nun ist aber bei festen Körpern noch keinerlei Ansatz möglich, wie er der Weglänge in der Gastheorie entsprechen würde.

Immerhin können wir bei der Bestimmung des Instabilitätspunktes thermostatisch rechnen, wenn wir nur Zustände betrachten, die sich nach so kleinen Erhitzungszeiten einstellen, daß erfahrungsgemäß unterhalb des Instabilitätspunktes noch keine merkliche Umwandlung einsetzt. Das sind also Zeiten der Größenordnung einiger Minuten.

Wir denken uns das verformte Metall innerhalb dieser Zeit von tiefer Temperatur auf eine bestimmte Glühtemperatur erhitzt, aber doch so langsam, daß es sich stets im Temperaturgleichgewicht befindet, so daß die kinetische Energie der verhakten Atome eine Maxwellsche Verteilung besitzt. Dabei werden dann stets die Atome, deren kinetische Energie größer ist als die Schwellenenergie, herausgefangen werden und in den unverzerrten Zustand fallen. Die Glühzeit, auf die wir uns beschränkt haben, ist aber so klein, daß keine neuen verhakten Atome eine genügend große Energie erhalten. Denn wenn dies der Fall wäre, würden auch sie die Schwelle überwinden können und es würde sich die Rekristallisation unterhalb des Instabilitätspunktes einstellen. Daß keine merkbare Rekristallisation bei unseren kurzen Glühzeiten eintritt, ist also ein Kennzeichen dafür, daß die durch das Herausfangen einzelner hoher Geschwindigkeiten gestörte Temperaturverteilung der verhakten Atome sich noch nicht ausgeglichen hat. Dagegen wird sich die durch das Überspringen einzelner verhakter Atome gestörte mechanische Spannungsverteilung sofort ausgleichen und somit stets die Schwellenenergie eine Funktion der Dichte der Verhakungsstellen sein.

Wie der Instabilitätspunkt zustande kommt, sieht man am übersichtlichsten bei einer graphischen Diskussion, die ganz ähnlich wie in der Weißschen Theorie durchzuführen ist (Fig. 8).

Die Zahl der verhakten Atome bei tiefer Temperatur sei d_0 . Nachdem das Metall nach der oben gegebenen Vorschrift auf die



Bestimmung des Instabilitätspunkts

Fig. 8

Temperatur T erhitzt wurde und die Atome der höchsten kinetischen Energie herausgefangen sind, beträgt diese Zahl:

$$(18) \quad d = d_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(KT)^{3/2}} \int_0^E e^{-\frac{E}{KT}} \sqrt{E} dE,$$

wo E die Schwellenenergie ist.¹⁾

1) In Wirklichkeit ist anzunehmen, daß die Wärmegeschwindigkeit des verhakten Atomes in einen bestimmten Richtungsbereich fallen muß,

Nun ist aber E selbst eine Funktion von d . Somit stellt die Gleichung (18) eine Beziehung zwischen d und T vor, deren Verlauf aus der graphischen Darstellung ersichtlich wird.

Die Funktion d können wir durch partielle Integration in Beziehung bringen zu dem z. B. bei Czuber¹⁾ tabulierten Wahrscheinlichkeitsintegral Φ . Es ist:

$$d = d_0 \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{E}{KT}} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E}{KT}} \sqrt{\frac{E}{KT}} \right).$$

Diese Funktion hat einen Wendepunkt für:

$$E = \frac{KT}{2}.$$

Wir tragen zunächst die Schwellenenergie E als Funktion von d auf, wie sie durch die Überlegungen des § 14 gegeben ist und zwar nehmen wir sie der Einfachheit halber als Gerade an. Außerdem tragen wir d nach (18) als Funktion von E auf. Die Schnittpunkte beider Kurven sind Lösungen. Da die Kurven (18) noch von dem Parameter T abhängen, sind auch diese Lösungen von T abhängig. Man sieht, daß mit wachsendem T die Kurven (18) in ihrem Hauptverlauf nach größeren E rücken und daß es eine gibt, welche die Kurve $E(d)$ tangiert. Bei größerem T ist keine Lösung außer $d = 0$ mehr möglich. Das T , bei welchem die beiden Kurven sich berühren, ist die Temperatur des Instabilitätspunktes.

Wenn also die Temperatur über den Instabilitätspunkt steigt, so werden *gleichzeitig* so viele Verhakungen beseitigt, daß die Energieschwellen der übrigen sehr klein würden. Daher können diese auch von Atomen kleinerer Geschwindigkeit *sofort* überwunden werden. So werden *sofort sämtliche* Verhakungen beseitigt.

§ 17. Instabilitätspunkt bei verschiedenen Verformungsgraden

Es ist nun zu untersuchen, inwiefern es berechtigt ist, den so bestimmten Instabilitätspunkt der Rekristallisationstemperatur gleichzusetzen.

damit es die Verhakung überwinden kann. Es wäre also statt des Faktors \sqrt{E} eine niedrigere Potenz im Integranden einzusetzen, dies würde aber die Existenz einer Tangente nicht ändern.

1) I. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, I. 1924.

Zunächst scheint dem die bekannte Tatsache zu widersprechen, daß die Rekristallisationstemperatur um so niedriger ist, je höher der Verformungsgrad des Metalles ist. Nach unseren Überlegungen ist ja die Temperatur des Instabilitätspunktes um so höher, je dichter die Verhakungsstellen liegen, je größer also d_0 ist. Wir können nun nicht sagen, wie d_0 vom Verformungsgrad abhängt, aber jedenfalls wird es mit zunehmendem Verformungsgrad nicht kleiner.

Nun ist aber unter Rekristallisationstemperatur die Temperatur verstanden, bei welcher zuerst im Metallmikroskop oder im Röntgenbild Körner sichtbar werden.¹⁾ Der von uns eingeführte Instabilitätspunkt ist aber die Temperatur, bei der nach kurzer Glühzeit irgendein neuer Vorgang im verformten Gefüge eintritt.²⁾ Dies braucht nicht immer sofort eine Kornneubildung zu sein.³⁾ So haben Sachs und Schiebold (26, 29) bei Al-Drähten gefunden, daß die Festigkeit abfällt bei Glühtemperaturen, bei denen noch lange keine Körner sichtbar werden.⁴⁾ Koref (32) und Becker (33) haben bei Drähten beobachtet, daß diesem Festigkeitsabfall eine „Aufspaltung“ der Debyelinien parallel geht, d. h. daß die durch die Kaltbearbeitung verwaschenen $K\alpha$ -Doublets wieder scharf werden (1). Bei Walzblechen hohen Walzgrades ist dies nicht der Fall, wie die Untersuchungen Widmanns zeigen. Wir haben aber zu erwarten, daß bei niederen Walzgraden⁵⁾ statt des Kornwachstums zunächst ein Festigkeitsabfall (Erholung) und ein Scharfwerden der Debyelinien einsetzt bei einer Tem-

1) Z. B. G. Tammann (10, 11). — Dabei ist aber zu bemerken, daß für sehr kleine Walzgrade diese Temperatur sehr wenig ausgeprägt ist. Vgl. auch A. Bass (8).

2) Das ist auch die Vorstellung von G. Masing (21).

3) G. Tammann u. V. Selge (11) erhalten bei verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Rekr.-Temp. oft sehr verschiedene Werte.

4) Bei technischem Al können diese Effekte allerdings auch von Legierungsvorgängen herrühren.

5) Und wahrscheinlich auch bei Einkristallen, wo ja die eigentliche Rekristallisation später einsetzt als bei Vielkristallen [vgl. E. Schmid (34)]. Dabei ist aber zu beachten, daß es auch eine schnelle Erholung bei viel tieferer Temperatur als die von uns betrachtete geben kann, die mehr der elastischen Nachwirkung, also dem Vorhandensein weniger Verhakungsstellen mit sehr kleiner Schwellenenergie entspricht, wie von Prandtl durchgerechnet wurde (40).

peratur, die gleich ist der Rekristallisationstemperatur bei hohen Walzgraden oder sogar niedriger liegen könnte als diese.¹⁾

Die Festigkeitskurven, welche Widmann (5) bei Kupfer und Silber von 75 Proz. und 90 Proz. Walzgrad erhielt, bestätigen dies. Bei noch kleineren Walzgraden haben wir selbst die Aufspaltung der Debyelinien untersucht. So erhielten wir in einem Silberblech von 99,9 Proz. Walzgrad bei 90° die ersten Körner. Bei 75 Proz. Walzgrad wurden bei dieser Temperatur die Linien scharf, ohne daß Körner auftreten. Bei 20 Proz. und 50 Proz. Walzgrad wurden ebenfalls bei 90° die Linien deutlich scharf.²⁾

Man sieht also, daß unsere Definition des Instabilitätspunktes berechtigt ist und außerdem, daß sich experimentell derselbe Wert von d_0 für verschiedene Verformungsgrade ergibt.

§ 18. Zahlenmäßige Ergebnisse

Die genaue zahlenmäßige Bestimmung der Temperatur des Instabilitätspunktes ist nicht möglich, solange nicht der Wert von d_0 bekannt ist, der wohl nur durch näheres Eingehen auf den Verformungsvorgang und die Verfestigung zu erhalten sein wird.

Immerhin läßt sich zeigen, daß die richtige Größenordnung für die Rekristallisationstemperatur aus unserer Rechnung sich ergibt. Nach Tab. 2 (vgl. S. 771) hat bei Kupfer und Silber, deren Rekristallisationstemperatur in reinem Zustand zwischen Zimmertemperatur und 200° liegt, die Konstante A , welche die Höhe des periodischen Potentials mißt, den Wert von ungefähr $2 \cdot 10^{-13}$ erg. Der Wert der Schwellenenergie E muß beträchtlich kleiner sein als A , da ja die elastische Kraft stets der periodischen Kraft entgegenwirkt.

Nehmen wir nun an, daß die Berührung der zwei Kurven in Abb. 8 in der Nähe des Wendepunktes von d eintritt, also da, wo der Instabilitätspunkt am steilsten ausgeprägt wäre, so ist hier

$$E = \frac{kT}{2}.$$

1) Diese Ansicht vertritt auch R. Gross (19), ebenso G. Masing (21).

2) Es ist bemerkenswert, daß dieses Scharfwerden bei gleichbleibender Temperatur um so deutlicher wird, je kleiner der Walzgrad ist. Nach § 21 entspricht dem, daß bei niederen Walzgraden keine Rekristallisationslage auftritt.

Für $T = 300^\circ$ abs. hat dieser Ausdruck den Wert $2 \cdot 10^{-14}$ erg. Also wäre die Schwellenenergie ungefähr zehnmal kleiner als die Höhe des elastischen Potentials. Nach der auf S. 777 angeführten graphischen Abschätzung wäre für diesen Faktor 10 eine Verhakungsdichte $s = \frac{2}{d}$ zwischen 5 und 10 anzunehmen, also jedes 5. bis 10. Atom wäre verhakt. Ein derartiger Zustand ist gut vorstellbar.

Nimmt man an, daß für verschiedene Metalle dasselbe d_0 einzusetzen ist, so folgt, daß ihre Rekristallisationstemperaturen sich gleichlaufend mit dem zu A proportionalen Schubmodul G (S. 770) bewegt. Nun ist nach Tab. 2 S. 771 G bei Eisen ungefähr doppelt so groß wie bei Kupfer und Silber, bei Blei sehr viel kleiner als bei diesen. Experimentell ergibt sich dementsprechend, daß Eisen bei viel höherer Temperatur als Kupfer und Silber, Blei dagegen bei viel niedriger, schon unterhalb Zimmertemperatur rekristallisiert. Wir können also aus unseren Rechnungen die experimentell bestätigte *Regel* entnehmen: Die *Rekristallisationstemperatur* geht *parallel* mit dem *Schubmodul*.

VI. Die Kornbildung

§ 19. Fortgang der Rekristallisation

Nachdem der Instabilitätspunkt überschritten ist oder nachdem durch langes Glühen bei niedriger Temperatur das verformte Gefüge instabil geworden ist, setzt das ein, was *äußerlich* bei der Rekristallisation in Erscheinung tritt, Festigkeitsabfall und Kornwachstum.¹⁾ Jetzt grenzen ja verschobene, im allgemeinen auch verschieden orientierte und verbogene Gitterbereiche nach Art der Fig. 4 aneinander, ohne daß sie durch gegenseitige Verhakungen stabilisiert sind.

Diesen Zustand betrachtet Tammann (10) in seiner Theorie der Rekristallisation als Gefüge des verformten Metalls. Er nimmt an, daß bei tiefen Temperaturen dieses Gefüge ohne weitere Stabilisierung besteht und dabei stets die Tendenz zur Umwandlung hat. Die Rekristallisationstemperatur ist das

1) Auch wenn vor der letzten Kaltbearbeitung bei genügend hohen Temperaturen zwischengeglüht wurde, können solche instabile Stellen vorhanden sein und ein Kornwachstum veranlassen, ohne daß die Rekristallisationstemperatur nochmals überschritten wurde. So entsteht die auf S. 759 beschriebene sekundäre Rekristallisation.

jenige Temperaturgebiet, in welchem diese Umwandlung merkbare Werte annimmt. Zwischen den oben beschriebenen Bereichen bilden sich dann durch Platzwechsel (Selbstdiffusion) der Atome ganz neue Gitter, welche die Kristallisationskeime der neuen Körner sind.

Diese Vorstellungen können aber wohl niemals die nach § 5 experimentell festgestellte Existenz einer scharf definierten Rekristallisationstemperatur erklären. Sehr charakteristisch ist ferner, daß die Rekristallisationstemperatur durch Beimengungen in der Größenordnung von 0,1 Proz. und weniger in weiten Grenzen herauf- oder herabgesetzt wird (5). Nun kommt nach der Diffusionstheorie die Rekristallisationstemperatur durch einen Volumeffekt zustande, sie soll ja die Temperatur sein, bei der die Selbstdiffusion in einem ganzen Gitterteil merkbar wird. Nach der in den vorhergehenden Abschnitten dargelegten Ansicht ist dagegen die Rekristallisationstemperatur das Ergebnis eines Oberflächeneffekts, bei dem nur die Atome an den Grenzflächen der in § 4 definierten Bereiche mitwirken. Man sieht leicht, daß man kleinere Mengen von Beimengungen braucht, um einen Oberflächeneffekt zu beeinflussen als einen Volumeffekt, insbesondere da man annehmen kann, daß die Beimengungen sich an den Grenzflächen anhäufen.

Es ist auch nicht anzunehmen, daß zwar die Rekristallisationstemperatur durch die Stabilität der Verhakungen bestimmt wird, nach Überwindung des Instabilitätspunktes aber eine vollständige Selbstdiffusion einsetzt, die zu den neuen Körnern führt. Denn die Selbstdiffusion in reinen Metallen ist wie die Fremddiffusion bei niederen Temperaturen sehr gering¹⁾, Grube²⁾ fand, daß die Diffusion erst bei Temperaturen oberhalb 1000°, unabhängig vom Schmelzpunkt des betreffenden Metalles, merkbare Größe erreicht, und auch hier bemessen sich die erforderlichen Glühzeiten nach Tagen. Die Selbstdiffusion ist sicherlich noch geringer.

Betrachtet man die auf ein Atom an der Grenze der Gitterbereiche nach Überschreitung des Instabilitätspunktes wirkenden Kräfte, so kommt man zu einer anderen Vorstellung von der Art, wie sich zwei derartige Bereiche zu einem neuen Korn zusammenschließen können. Zu einem ganz ähnlichen Bild ist Smekal (18)

1) G. v. Hevesy u. G. Rienäcker, *Ann. d. Phys.* **24**. S. 674. 1927.

2) G. Grube, *Ztschr. f. Metallk.* **19**. S. 438. 1927.

auf Grund anderer Überlegungen gekommen. Die an der Grenze zweier Gitterbereiche liegenden Atome sind nicht wie die im Innern des Gitters befindlichen von allen Seiten im Gleichgewicht gehalten, sondern *ungleichmäßigen* seitlichen Beanspruchungen ausgesetzt. Bei einem von ihnen mögen diese am stärksten sein. Es wird zuerst nachgeben und an einen günstigeren Platz rücken. Dadurch wird die Beanspruchung des ihm benachbarten Atoms ungleichmäßiger. Es rückt ebenfalls nach, und so wandert die größte Ungleichmäßigkeit, die „Lockerstelle“, entlang der ganzen Grenze, hinter sich die Atome in einer stabileren Lage zurücklassend.

Es ist einleuchtend, daß bei einem derartigen Vorgang diejenigen Gitterteile, die am wenigsten elastisch deformiert sind, die Atome der stärker elastisch beanspruchten Teile ihrer eigenen Orientierung anpassen (35). So ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Walzstruktur und der Orientierung der neugebildeten Körner, der Rekristallisationslage, welcher im folgenden näher besprochen werden soll.

§ 20. Die Rekristallisationsstrukturen

Bekanntlich führt eine gleichmäßige, genügend starke Verformung zu einer Deformationsstruktur. Diese besteht darin, daß sich die einzelnen Kristallite mit ihren kristallographischen Achsen unter geringer Streuung in bestimmte Orientierungen zu den Verformungsrichtungen einstellen. Dabei können gleichzeitig mehrere solcher Orientierungen („Lagen“) vorhanden sein.

Vielfach sind nun auch die Körner, die sich aus einer Deformationsstruktur heraus durch Rekristallisation neu gebildet haben, kristallographisch orientiert (6). Die experimentellen Untersuchungen lassen dabei *drei Fälle* unterscheiden (7):

a) Das neugebildete Korn hat eine deutlich ausgeprägte Orientierung, welche in der Deformationsstruktur nicht vorkam (3).

b) Eine der in der Deformationsstruktur vorhandenen Orientierungen und zwar meistens eine nur schwach vertretene, bleibt bei der Rekristallisation erhalten. Alle neuen Körner wachsen in dieser Orientierung auf (5).

c) Die Deformationsstruktur bleibt erhalten, solange man nur wenig oberhalb der Rekristallisationstemperatur glüht;

bei höherer Glühtemperatur aber wachsen die Körner ohne jede Orientierung (regellos) auf.

Man sieht auf Grund der Überlegungen des vorhergehenden Paragraphen leicht, daß der Fall c) dann eintritt, wenn im verformten Zustand keine Orientierung eines Gitterteils eine besondere elastische Deformation erfahren hat. Für das Zustandekommen der beiden anderen Fälle dagegen ist nötig, daß die einzelnen Gitterteile je nach ihrer kristallographischen Orientierung zur Blechoberfläche bzw. Drahtachse verschiedenen elastischen inneren Spannungen unterliegen.

Wenn man die Überlegungen des § 3 nach ihrer geometrischen Seite weiter verfolgt, wie das in § 22 geschieht, so erkennt man, daß, wenn die Kraftrichtung während der Verformung dieselbe blieb, die elastischen Spannungen ganz bestimmte Lagen zu den Gleitelementen haben und bei einer Deformationsstruktur damit auch zu der Walzebene orientiert sind. Man kann also sagen: Wenn eine Deformationsstruktur vorhanden ist, sind etwa bestehende elastische Verzerrungen stets orientiert. Nach (2) rufen die Verzerrungen eine Verbreiterung der Debyelinien hervor. So läßt sich der Zusammenhang zwischen elastischen Spannungen und dem Auftreten der Fälle a) und b) experimentell nachprüfen.

§ 21. Experimentelles über Verbreiterung und Rekristallisationsanlage

Folgendes experimentelle Material, das durch Beobachtungen mit der in (2) beschriebenen Kammer gewonnen wurde, spricht dafür, daß die Vorbedingung für die oben unter a) und b) beschriebene Abweichung der Rekristallisationslage von der Walzlage bei Blechen eine Verbreiterung der Debyelinien vor der Rekristallisation ist:

1. Aluminium, das stets scharfe Linien hat, rekristallisiert regellos (7).

2. Gold verbreitert nach unseren Untersuchungen lange nicht in dem Maße wie Silber; bevor aber Körner erscheinen, werden auch bei hohen Walzgraden die Linien ganz scharf, und zwar war das bei unserem Material bei einer Temperatur von 210° der Fall. Auf den scharfen Linien erschienen dann die ersten Körner, und zwar in regelloser Orientierung.

3. Kupfer, welches nicht warm vorbehandelt wurde, verbreitert zunächst. Dann aber tritt dasselbe ein wie bei Gold, die Linien werden bei jedem Walzgrad bei Erhöhung der Temperatur scharf, dann erst rekristallisiert das Material regellos (5).

4. Bei Kupfer, welches vor dem Kaltwalzen warm bearbeitet wurde, oder welches während des Kaltwalzens zwischengeglüht wurde, erscheinen die ersten Körner auf den verbreiterten Linien. Dieses Kupfer rekristallisiert in einer Würfelage, wie für warm vorbehandeltes Material Widmann (5) gezeigt hat, für zwischengeglühtes H. Kaiser (25) mittels Festigkeitsuntersuchungen, der Verfasser mittels Röntgenaufnahmen gefunden hat.

5. Silber, das sehr stark verbreiterte Linien zeigt, behält diese bei Walzgraden über 90 Proz. und rekristallisiert dann in der von Glocker beschriebenen Rekristallisationslage (3).

6. Bei Silber niederen Walzgrades werden, wie schon in § 17 besprochen, die Linien scharf, bevor neue Körner auftreten¹⁾, wie es im Fall 1 bis 3 auch bei hohen Walzgraden der Fall ist. Dann rekristallisiert das Material regellos.

Man kann also folgende *Regel* aufstellen: Hatte ein Walzblech in verformtem Zustand beim Einsetzen des Kornwachstums verbogene Gleitlamellen, und außerdem eine Walzlage, so rekristallisiert es in einer bestimmten Orientierung und die Festigkeitskurve fällt steil ab. Hatte es dagegen vor dem Kornwachstum keine Verbiegung, so wachsen die Körner regellos.

§ 22. Erklärung des Zusammenhangs zwischen Deformations- und Rekristallisationslager

Wir gehen nach § 19 aus von der Hypothese, daß die am wenigsten deformierten, von deformierten Bereichen umgebenen Gitterteile als Keime für die neuen Körner wirken, daß die verbogenen und gepreßten Bereiche gewissermaßen von den noch unversehrten Stellen aufgesaugt werden. So wird die Annahme einer Kornneubildung vermieden und andererseits die bei Einkristallen festgestellte Tatsache (28) erklärt, daß zur Bildung eines neuen Kornes eine Verbiegung notwendig ist.

1) Solche niedere Walzgrade wurden in (2) nicht untersucht, daher kam hier diese Erscheinung nicht zum Ausdruck. Demgemäß ist die auf S. 618 jener Arbeit behauptete Tatsache auf Walzgrade von 80 bis 95 Proz. einzuschränken.

Wir haben also diejenigen Lagen des deformierten Gefüges aufzusuchen, welche am wenigsten durch die Druckkräfte der Walzen beansprucht sind. Da für eine exakte Rechnung unter Berücksichtigung der kristallographischen Gleitmöglichkeiten heute noch keine Ansätze vorhanden sind, müssen anschauliche Betrachtungen genügen.

a) Nach § 3 muß die größte Verbiegung, welche die Verbreiterung verursacht, in der Ebene größter Streuung der Walzstruktur liegen, welche senkrecht zur Walzrichtung steht und die Druckrichtung enthält. In Fig. 4c wurde die dadurch entstehende wellenförmige Krümmung dargestellt, deren Zylinderachse parallel zur Walzrichtung [112] ist. Es gibt darin zwei Stellen von verschwindendem Krümmungsradius, welche durch die Verbiegung am wenigsten beansprucht werden.

Das umgebende Material übt aber auf ein derartiges Stück während des Walzens einen Druck aus, welcher ungefähr die Richtung des Außendruckes hat und die einzelnen Stellen zusammenpreßt. Von diesen Druckkräften wirkt deformierend hauptsächlich die Komponente, welche senkrecht zur betätigten Gleitebene steht (Fig. 4d). Man sieht so, daß ein Teilstück einer Lamelle um so weniger deformiert wird, je näher die es begrenzende Gleitebene der Druckrichtung kommt. Es ergibt sich daraus, daß ein Teilchen, unabhängig davon, ob es zu einer mehr oder weniger verbogenen Lamelle gehört, um so mehr im ganzen deformiert, also durch Biegung und Pressung beansprucht wird, je näher es der exakten Walzlage kommt.

Somit wird zunächst verständlich, daß bei der orientierten Rekristallisation gerade die Richtung der Walzlage nicht mehr auftritt. Weiter müssen die wenig deformierten Teilchen sich in verbogenen Gleitlamellen befinden. Es ist nun aber nur in einer Richtung die Verbiegung groß. So ergibt sich die von Glocker (6) aufgestellte Regel, daß die Rekristallisationslage durch Aufspaltung der einen Walzlage in zwei neue Zustände kommt. Wenn man nun die oben abgeleitete Lage der Biegungsachse berücksichtigt, so versteht man auch die geometrische Lage der rekristallisierten Körner. Sie gehen aus der Walzlage durch eine Drehung um diese Achse, also die Walzrichtung, hervor, wie es ja bei Silberwalzblechen gefunden wurde. Auch die Größe dieser Drehung, welche experimentell zu $31\frac{1}{2}^\circ$ gemessen wurde, ist verständlich, wenn man bedenkt, daß bei

einer Drehung von 45° die Druckrichtung den kleinsten Winkel mit der Gleitrichtung bilden würde, daß aber zu einer solchen Drehung die Verbiegung auch aus der gestreuten Walzlage zu groß sein würde. Natürlich wird ja der größte Teil der Drehung von der schon bestehenden Streuung geliefert, denn die Verbiegung wird nicht größer sein als einige Grade, immerhin hat sie den Erfolg, Stellen im Gitter zu schaffen, welche wenig deformiert sind.

b) Bei vorbehandeltem Kupfer muß man eine andere Grundlage für die Bildung der neuen Körner annehmen.

Gehen wir wieder von der Hypothese aus, daß die Keime für neue Körner im verformten Material anwesend sein müssen, so haben wir jetzt zu prüfen, ob im gewalzten Kupfer eine Würfellage möglich ist. Tatsächlich wurde eine solche auch festgestellt, wenn auch nur in geringer Häufigkeit; nach den Überlegungen Polanyis müssen die möglichen Gleitrichtungen auch außer zu der häufigsten Walzlage zu dieser Würfellage führen. Bei weiterer Ausführung der Überlegungen des § 19 läßt sich nun zeigen, daß eine solche Würfellage weniger stabil, aber auch weniger durch Druck beansprucht ist als die [112]-Lage. Es ist nämlich die Würfellage zustande gekommen dadurch, daß sich vier Gleitrichtungen gleichzeitig betätigen, während die [112]-Lage nur durch zwei Gleitrichtungen zustande gebracht ist. Ein Kristallstück also, das einer Würfellage näher rückt, hat vielmehr Möglichkeit, einer Druckbeanspruchung auszuweichen, als wenn es einer [112]-Lage nahe kommt. Es wird dadurch aber auch mehr in Gefahr kommen, ganz aus der Würfellage herausgedrängt zu werden.

Man hat also anzunehmen, daß kleine Bereiche im warm vorgewalzten, verformten Kupfer die Würfellage einnehmen und dann weniger durch Druck beansprucht werden als die übrigen. Sie können dann als Keime der neuen Körner gegenüber dem übrigen deformierten Gefüge wirken.

Weshalb nun gerade bei diesem Kupfer eine solche Lage sich stärker ausbildet als bei Silber, das muß von einer verschiedenen Gleitfähigkeit und latenten Verfestigung der einzelnen Gleitrichtungen bei höheren Temperaturen herrühren, über die uns die bisherigen Messungen an Einkristallen noch keine Auskunft gegeben haben, die aber als durchaus möglich erscheint, wenn man beachtet, daß z. B. auch beim Ziehen von Drähten

das gegenseitige Verhältnis der Würfellage zur [110]-Lage bei den einzelnen Materialien wechselt.

c) Man sieht, daß das Auftreten und die Art einer Rekristallisationslage davon abhängt, ob beim Instabilitätspunkt die elastischen inneren Verzerrungen und Verbiegungen noch stabil sind oder nicht. Bei kleineren Walzgraden scheinen sie das allgemeine nicht zu sein, erst bei sehr hohen Walzgraden und bei besonderen Vorbedingungen tritt dieser Fall ein. Man kann sich etwa vorstellen, daß diese besondere Stabilität der Verbiegungen durch noch nicht aufgelöste Verhakungen an einzelnen Stellen der Gleitlamellen verursacht ist. Endgültig kann diese Frage wohl nur gelöst werden, wenn das metastabile Gleichgewicht des verformten Zustands über das ganze Stück vollständig durchgerechnet werden kann.

Die experimentellen Teile der Arbeit wurden mit Benützung von Apparaten der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft ausgeführt. Für ihre Überlassung, sowie für seine dauernde Anteilnahme am Fortgang der Arbeit möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Glocker, herzlich danken. Ebenso danke ich Herrn Prof. P. P. Ewald für viele wertvolle Ratschläge.

Stuttgart, Röntgenlaboratorium an der Technischen Hochschule.

Literatur

- 1) U. Dehlinger, Die Rekristallisation der Metalle. Metallwirtschaft 7. H. 43. 1928.
- 2) U. Dehlinger, Über die Verbreiterung der Debyelinien bei kaltbearbeiteten Metallen. Ztschr. f. Krist. 65. S. 615. 1927.
- 3) R. Glocker u. E. Kaupp, Beobachtungen des Rekristallisationsvorgangs mittels Röntgenstrahlen. Ztschr. f. Metallk. 16. S. 181. 1924.
- 4) R. Glocker, E. Kaupp u. H. Widmann, Über die Rekristallisation gewalzter Silberbleche. Ztschr. f. Metallk. 17. S. 335. 1925; 18. S. 69. 1926.
- 5) H. Widmann, Stuttg. Diss. Über die Rekristallisation bei Silber und Kupfer. Ztschr. f. Phys. 45. S. 200. 1927.
- 6) R. Glocker, Über Deformations- und Rekristallisationsstrukturen von Metallen. Ztschr. f. Phys. 31. S. 368. 1925.
- 7) R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. Berlin 1927.

- 8) A. Bass, Stuttg. Diss. Über die Rekristallisation des α -Messings. *Ztschr. f. Metallk.* **19**. S. 179. 1928.
- 9) F. Sauerwald, Artikel in Müller-Pouillet, *Lehrb. d. Phys.* III. S. 373. 1926.
- 10) G. Tammann, *Lehrb. d. Metallographie*. Leipzig 1923.
- 11) G. Tammann u. V. Salge, Zur Bestimmung der Temperatur des Beginns der Rekristallisation. *Ztschr. f. Metallk.* **19**. S. 187. 1927.
- 12) H. Althertum, Zur Theorie der Rekristallisation. *Ztschr. f. Metallk.* **14**. S. 417. 1922.
- 13) A. Smekal, Über die Bedeutung der Kristallbaufehler für das Verständnis der technisch beeinflussbaren Werkstoffeigenschaften. *Metallwirtschaft* **7**. H. 28. 1928.
- 14) H. Hanemann, *Ztschr. f. Metallk.* **17**. S. 316. 1925. Darstellung der Rekristallisationserscheinungen auf Grund der Korngrößenänderung bei Warmverformung.
- 15) I. Czochralski, *Moderne Metallkunde*. Berlin 1924.
- 16) I. Czochralski, Geschichtlicher Beitrag zur Frage der Rekristallisation. *Ztschr. f. Metallk.* **19**. S. 316. 1927.
- 17) I. Czochralski, Verlagerungshypothese und Röntgenforschung. *Ztschr. f. Metallk.* **15**. S. 60. 1923.
- 18) F. Fränkel, Zur Frage der Rekristallisation reinen, mechanisch unbeanspruchten, aus dem Schmelzfluß erstarrten Goldes. *Ztschr. f. anorg. Chemie* **122**. S. 295. 1922.
- 19) H. Gross, Verfestigung und Rekristallisation. *Ztschr. f. Metallk.* **16**. S. 344. 1924.
- 20) F. Rinne, Vorbilder für die Metallmechanik. *Ztschr. f. Metallk.* **18**. S. 37. 1926.
- 21) G. Masing, Rekristallisation und Erholung (Kristallvergütung) bei Metallen. *Wiss. Veröff. a. d. Siemenskonzern* **4**. S. 230. 1925.
- 22) G. Masing, Rekristallisation des Zinks. *Ztschr. f. Metallk.* **12**. S. 457. 1920; **13**. S. 25. 1921.
- 23) H. Böhner, Zugfestigkeits- und Leitfähigkeitsänderungen hartgezogener Drähte unter dem Einfluß kurzzeitiger Erwärmungen. *Ztschr. f. Metallk.* **20**. S. 132. 1928.
- 24) P. Siebe, Glühversuche mit verschiedenen Metalldrähten. *Ztschr. f. Metallk.* **19**. S. 385. 1927.
- 25) H. Kaiser, Zipfelbildung beim Näpfchenziehen. *Ztschr. f. Metallk.* **19**. S. 435. 1927.
- 26) G. Sachs u. E. Schiebold, Rekristallisation und Entfestigung im Röntgenbild. *Ztschr. f. Metallk.* **17**. S. 400. 1925.
- 27) G. Sachs u. E. Schiebold, Walz- und Rekristallisationstextur regulär flächenzentrierter Metalle. *Ztschr. f. Phys.* **41**. S. 875. 1927.
- 28) G. Sachs, Einige Beobachtungen an Aluminium und Aluminiumlegierungen. *Ztschr. f. Metallk.* **18**. S. 209. 1926.
- 29) F. v. Göler u. G. Sachs, Gefüge und Festigkeitseigenschaften von sehr reinem Aluminium. *Ztschr. f. Metallk.* **19**. S. 90. 1927.

30) Karnop u. Sachs, Versuche über die Rekristallisation von Metallen. *Ztschr. f. Phys.* **42**. S. 283. 1927.

31) M. Ettisch, M. Polanyi u. K. Weissenberg, *Ztschr. f. Phys.* **7**. S. 181. 1921.

32) F. Koref, Über Kristallvergütung; Beobachtungen über die Entfestigung verfestigter Wolframdrähte. *Ztschr. f. Metallk.* **17**. S. 213. 1925.

33) K. Becker, Der röntgenographische Nachweis von Kornwachstum und Vergütung in Wolframdrähten. *Ztschr. f. Phys.* **42**. S. 226. 1927.

34) E. Schmid, Kaltreckung und Verfestigung. *Ztschr. f. Metallk.* **16**. S. 104. 1924.

35) A. E. van Arkel, *Congrès Int. Essai Matériaux Amsterd.* **1**. S. 157. 1927.

36) A. E. van Arkel u. P. Koets, Das Wesen der Rekristallisationskerne bei Metallen. *Ztschr. f. Phys.* **41**. S. 701. 1927.

37) A. E. van Arkel u. M. G. van Bruggen, Rekristallisationserscheinungen bei Aluminium. *Ztschr. f. Phys.* **42**. S. 795. 1927; **51**. S. 520. 1928.

38) A. E. van Arkel u. J. J. A. Ploos, Rekristallisationserscheinungen bei Zinn. *Ztschr. f. Phys.* **51**. S. 534. 1928.

39) W. G. Burgers u. I. M. Basart, Rekristallisation von Aluminiumeinkristallen. *Ztschr. f. Phys.* **51**. S. 545. 1928.

40) P. Prandtl, Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. *Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.* **8**. S. 85. 1928.

(Eingegangen 16. Juni 1929)

Über das Strahlungsfeld einer endlichen Antenne zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen

Von Rudolf Weyrich

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurden die Interferenz- und Resonanzerscheinungen beschrieben, die bei der Strahlung eines Hertzschen Dipols zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen auftreten. Das untersuchte Strahlungsfeld kann näherungsweise als das einer Vertikalantenne angesehen werden, wenn die Entfernung des Aufpunktes von der Antenne und der Abstand der beiden Ebenen groß sind im Verhältnis zu den Abmessungen der Sendevorrichtung und zu der Wellenlänge. Soll die entwickelte Theorie als Grundlage von Laboratoriumsversuchen dienen, so bedarf sie, da wegen der geringen Entfernung zwischen Sende- und Empfangseinrichtung und des geringen Abstandes der reflektierenden Ebenen auf die endliche Ausdehnung der Antenne Rücksicht genommen werden muß, einer Erweiterung, die in den folgenden Zeilen gegeben wird, und welche leicht möglich ist, da die in der genannten Arbeit ermittelte Funktion II für ihren Definitionsbereich den Charakter einer Greenschen Funktion hat. Verwendet man sie als Kern eines Integrals mit einer passend gewählten Belegungsfunktion, welche die Intensität einer Dipolbelegung der Antenne angibt, so stellt dieses analytisch das Feld dieser Antenne dar, welches denselben Randbedingungen genügt wie das zu dem Potential II gehörige Feld. Dieses ist räumlich periodisch und kann aus den Feldern der Dipole einer unendlichen Dipolreihe additiv zusammengesetzt werden. Es genügt

1) R. Weyrich, Zur Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der Erdoberfläche, Ann. d. Phys. [4] 85. Nr. 5. S. 552. 1928. Erklärungen von Bezeichnungen, die hier der Kürze halber unterbleiben, sind in dieser Arbeit zu finden.

daher, der Kürze wegen die Theorie unter Zugrundelegung des Potentials eines Hertzschen Dipols

$$\Pi_0 e^{-i\omega t} = \frac{1}{R} e^{i(kR - \omega t)}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2$$

als Kern des Integrals durchzuführen, da sich hierauf auch der allgemeine Fall zurückführen läßt.

Die Antenne möge mit dem Intervall $a \leq z \leq b$ der z -Achse zusammenfallen und sei vollkommen leitend, $f(z)$ sei eine reelle¹⁾, in dem Intervall (a, b) stückweise stetige und beschränkte Funktion; dann ist in Zylinderkoordinaten r, φ, z das Integral

$$\begin{aligned} \Pi_{0A} e^{-i\omega t} &= \int_a^b \Pi_0 e^{-i\omega t} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_a^b \frac{\exp i(k\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2} - \omega t)}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

das Potential der mit Dipolen von der Intensität $f(z)$ belegten Antenne. Um die Stromverteilung in der Antenne zu bestimmen, möge längs eines Kreises mit der Gleichung $r = r_0$, $z = z_0$ das Kurvenintegral

$$\oint \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi}{c} J$$

gebildet werden, welches die Gesamtstromstärke J durch die Fläche des Kreises in elektrostatischen Einheiten zu berechnen gestattet. Der Einfachheit halber werde k als reell, die Leitfähigkeit des die Antenne umgebenden Mediums also gleich Null angenommen. J setzt sich dann zusammen aus dem in der Antenne fließenden Konvektionsstrom und dem außerhalb der Antenne die Fläche des Kreises durchsetzenden Verschiebungsstrom. Ebenso wie im Felde eines Hertzschen Dipols verlaufen auch im Felde der endlichen Vertikalantenne die magnetischen Kraftlinien in Kreisen um die z -Achse, während

1) Die Annahme einer komplexen Funktion $f(z)$ würde dem entsprechen, daß die einzelnen Dipole der Belegung nicht synchron schwingen, sondern eine Phasenverschiebung gegeneinander aufweisen.

die elektrischen in den Ebenen $\varphi = \text{const.}$ liegen. Insbesondere ist im elektromagnetischen Felde der Antenne

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\varphi = \Re \left[\frac{\partial \Pi_{0A}}{\partial r} e^{-i\omega t} \right], \quad \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_z = 0,$$

und daher längs des Kreises $r = r_0$, $z = z_0$

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_\varphi ds = \int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_\varphi r_0 d\varphi = 2\pi r_0 \Re \left[\frac{\partial \Pi_{0A}}{\partial r} e^{-i\omega t} \right]_{r=r_0, z=z_0},$$

da \mathfrak{H}_φ auf dem Kreise konstant ist. Die Größe $\frac{\partial \Pi_{0A}}{\partial r}$ kann durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewonnen werden. Zur Abkürzung werde

$$R_0^2 = r_0^2 + (z_0 - \zeta)^2$$

gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} J &= 2\pi r_0 \Re \left[\frac{\partial \Pi_{0A}}{\partial r} e^{-i\omega t} \right]_{r=r_0, z=z_0} \\ &= 2\pi r_0 \int_a^b \Re \left[\left(-\frac{1}{R_0^2} + \frac{ik}{R_0} \right) e^{i(kR_0 - \omega t)} \right] \frac{r}{R_0} f(\zeta) d\zeta \\ &= -2\pi r_0^2 \int_a^b \left[\frac{\cos(kR_0 - \omega t)}{R_0^3} + k \frac{\sin(kR_0 - \omega t)}{R_0^2} \right] f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Zur ausschließlichen Erfassung der Stärke des Leitungsstromes in der Antenne und Elimination der Verschiebungsströme, welche die Fläche des Kreises $r = r_0$, $z = z_0$ durchsetzen, ist der Grenzübergang $r_0 \rightarrow 0$ zu vollziehen. Es ergibt sich für die Stromstärke J_A in der Antenne an der Stelle z_0 :

$$\begin{aligned} J_A(z_0) &= -\frac{c}{2} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0^2 \int_a^b \left[\frac{\cos(kR_0 - \omega t)}{R_0^3} + k \frac{\sin(kR_0 - \omega t)}{R_0^2} \right] f(\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{c}{2} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0^2 \left[\cos \omega t \int_a^b \frac{f(\zeta) d\zeta}{R_0^3} + \sin \omega t \int_a^b \frac{F(R_0) f(\zeta) d\zeta}{R_0^3} \right. \\ &\quad \left. + \cos \omega t \int_a^b \frac{G(R_0) f(\zeta) d\zeta}{R_0^3} \right], \end{aligned}$$

wobei

$$F(R_0) = \frac{\sin k R_0}{R_0} - k \cos k R_0,$$

$$G(R_0) = \frac{\cos k R_0 - 1}{R_0} + k \sin k R_0$$

gesetzt ist. Die Funktionen F und G sind als Funktionen des Arguments R_0 in der ganzen Ebene regulär und daher in einer beliebig großen, aber beschränkten Umgebung von $R_0 = 0$ selbst beschränkt. Es möge nun eine neue Integrationsvariable θ durch die Beziehung

$$z_0 - \zeta = r_0 \operatorname{tg} \theta \quad \text{bzw.} \quad R_0 \cos \theta = r_0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2} \right)$$

eingeführt und

$$\operatorname{arctg} \frac{z_0 - a}{r_0} = \alpha, \quad \operatorname{arctg} \frac{z_0 - b}{r_0} = \beta$$

gesetzt werden.¹⁾ Dann ist

$$r_0^2 \int_a^b \frac{F(R_0) f(\zeta) d\zeta}{R_0^3} = -r_0 \int_a^\beta F\left(\frac{r_0}{\cos \theta}\right) f(z_0 - r_0 \operatorname{tg} \theta) d\theta,$$

$$r_0^2 \int_a^b \frac{G(R_0) f(\zeta) d\zeta}{R_0^3} = -r_0 \int_a^\beta G\left(\frac{r_0}{\cos \theta}\right) f(z_0 - r_0 \operatorname{tg} \theta) d\theta.$$

Da die in den beiden rechts stehenden Integralen auftretenden Funktionen in dem Integrationsintervall beschränkt sind, und

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \alpha = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} \beta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{für } a < z_0 < b,$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \alpha = 0 \quad \text{für } z_0 = a, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} \beta = 0 \quad \text{für } z_0 = b$$

ist, das Integrationsintervall bei dem Grenzübergang $r_0 \rightarrow 0$ also unter allen Umständen endlich bleibt, so bleiben auch die

1) Die geometrische Bedeutung von θ liegt auf der Hand. Es ist der Komplementwinkel zu jenem Winkel, den die Verbindungslinien des Punktes $r=0$, $z=\zeta$ (Stromelement) mit den Punkten des Kreises $r=r_0$, $z=z_0$ mit der z -Achse (Richtung des Stromelements) bilden, also jenem Winkel, der in dem Biot-Savartschen Gesetz in seiner gewöhnlichen Formulierung verwendet zu werden pflegt. Hiernach sind die folgenden Grenzbetrachtungen auch vom physikalischen Standpunkt sofort einleuchtend.

Integrale endlich. Da sie noch mit dem Faktor r_0 behaftet sind, so streben die beiden zuletzt betrachteten Ausdrücke bei dem Grenzübergang $r_0 \rightarrow 0$ dem Grenzwert Null zu. Daher ist

$$J_A(z_0) = -\frac{c}{2} \cos \omega t \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0^2 \int_a^b \frac{f(\zeta) d\zeta}{R_0^3}.$$

Zur Berechnung dieses Grenzwertes möge, falls z_0 ein innerer Punkt des Integrationsintervalls (a, b) ist, dieses in vier Teilintervalle $(a, z_0 - \delta_1)$, $(z_0 - \delta_1, z_0)$, $(z_0, z_0 + \delta_2)$ und $(z_0 + \delta_2, b)$ zerlegt werden, wobei sich der stückweisen Stetigkeit von $f(\zeta)$ wegen die positiven festen Zahlen δ_1 und δ_2 so bestimmen lassen, daß für ein beliebig klein vorgegebenes ε die Ungleichungen

$$|f(\zeta) - f(z_0 - 0)| < \varepsilon \quad \text{für } z_0 - \delta_1 \leq \zeta \leq z_0,$$

$$|f(\zeta) - f(z_0 + 0)| < \varepsilon \quad \text{für } z_0 \leq \zeta \leq z_0 + \delta_2$$

erfüllt sind. Ferner sei

$$\operatorname{arctg} \frac{\delta_1}{r_0} = \gamma_1, \quad \operatorname{arctg} \frac{\delta_2}{r_0} = \gamma_2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} r_0^2 \int_a^b \frac{f(\zeta) d\zeta}{R_0^3} &= - \int_a^{\gamma_1} f(z_0 - r_0 \operatorname{tg} \theta) \cos \theta d\theta \\ &\quad - \int_{\gamma_1}^0 f(z_0 - 0) \cos \theta d\theta - \int_0^{-\gamma_2} f(z_0 + 0) \cos \theta d\theta \\ &\quad - \int_{-\gamma_2}^{\beta} f(z_0 - r_0 \operatorname{tg} \theta) \cos \theta d\theta \\ &\quad - \int_{\gamma_1}^0 [f(z_0 - r_0 \operatorname{tg} \theta) - f(z_0 - 0)] \cos \theta d\theta \\ &\quad - \int_0^{-\gamma_2} [f(z_0 - r_0 \operatorname{tg} \theta) - f(z_0 + 0)] \cos \theta d\theta, \end{aligned}$$

und es sind in den beiden letzten Integralen die in Klammern eingeschlossenen Teile der Integranden in dem Integrationsintervall ihrem Betrage nach kleiner als ε . Wegen

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \gamma_1 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} \gamma_2 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \beta = -\frac{\pi}{2}$$

konvergieren bei dem Grenzübergang $r_0 \rightarrow 0$ das erste und vierte Integral der rechten Seite gegen Null. Wird die Summe der Grenzwerte, dem die beiden letzten Integrale bei diesem Grenzübergang zustreben, mit g bezeichnet, so ist

$$|g| < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \cos \theta \, d\theta = 2\varepsilon,$$

also

$$g = 0,$$

da ε beliebig klein gemacht werden kann. Demnach ist

$$\begin{aligned} J_A(z_0) &= -\frac{c}{2} \cos \omega t \left[-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(z_0 - 0) \cos \theta \, d\theta - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(z_0 + 0) \cos \theta \, d\theta \right] \\ &= -c \cos \omega t \frac{f(z_0 - 0) + f(z_0 + 0)}{2}, \end{aligned}$$

insbesondere an einer Stetigkeitsstelle von $f(z)$

$$J_A(z) = -c \cos \omega t f(z),$$

und in den Endpunkten des Intervalls (a, b)

$$J_A(a) = -\frac{c}{2} \cos \omega t f(a), \quad J_A(b) = -\frac{c}{2} \cos \omega t f(b),$$

wie sich ohne weiteres auf Grund der durchgeführten Rechnung ergibt, wenn das Intervall (a, b) in ein Intervall (a_1, b_1) eingebettet und außerhalb (a, b) $f(z) = 0$ erklärt wird, da a und b dann innere Punkte von (a_1, b_1) sind. Ist umgekehrt eine bestimmte Stromverteilung in der Antenne vorgegeben, so läßt sich auf Grund der zuletzt ermittelten Gleichungen die zugehörige Intensität der Dipolbelegung ermitteln. Nach

M. Abraham¹⁾ ist die Stromstärke in einer linearen Antenne mit der Länge l

$$J = A \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi c t}{2l} \quad (n \text{ ganzzahlig}).$$

Der Zusammenhang der in dieser Formel auftretenden Größen mit den hier verwendeten ist durch die Gleichungen gegeben

$$\omega = \frac{(2n+1)\pi c}{2(b-a)}, \quad k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} = \frac{(2n+1)\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}{2(b-a)},$$

wobei ε und μ Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des die Antenne umgebenden Mediums bedeuten. Mit diesen Werten von ω und k ist das Potential des Strahlungsfeldes einer in ihrer Grundschiwingung ($n=0$) oder in ihren Oberschwingungen ($n=1, 2, \dots$) erregten linearen Antenne auf Grund der Abrahamschen Formel zu bilden, indem

$$f(z) = -\frac{A}{c} \cos \frac{\omega z}{c}$$

und das Potential selbst

$$\Pi_{0A} e^{-i\omega t} = -\frac{A}{c} \int_a^b \frac{\exp i(k\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2} - \omega t)}{\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}} \cos \frac{\omega \zeta}{c} d\zeta$$

gesetzt wird.

Bei Verwendung des Potentials Π des Strahlungsfeldes eines Hertzschen Dipols zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen²⁾ als Kern des Integrals ergibt sich entsprechend das Potential des Strahlungsfeldes einer Vertikalantenne zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen. Nach der in der zuletzt erwähnten Arbeit unter (11) mitgeteilten Formel ist, wenn statt der Integraldarstellungen der Dipolpotentiale diese in ihrer ursprünglichen Gestalt eingesetzt werden

$$\Pi = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\exp i k \sqrt{r^2 + (z - 2\nu h - \zeta)^2}}{\sqrt{r^2 + (z - 2\nu h - \zeta)^2}} + \frac{\exp i k \sqrt{r^2 + (z - 2\nu h + \zeta)^2}}{\sqrt{r^2 + (z - 2\nu h + \zeta)^2}} \right].$$

1) M. Abraham, Funkentelegraphie und Elektrodynamik, Phys. Ztschr. 2. Jahrg. Nr. 22. S. 330. 1901.

2) R. Weyrich, a. a. O. S. 562 und 565 ff.

Offenbar ist bei der Bildung des Potentials des Strahlungsfeldes der endlichen Antenne bei einem komplexen k mit positivem Imaginärteil, aber auch in dem Grenzfall, daß dieser Imaginärteil Null ist, die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschbar:

$$\int_a^b \Pi e^{-i\omega t} f(\zeta) d\zeta = e^{-i\omega t} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b \frac{\exp ik \sqrt{r^2 + (z - 2\nu h - \zeta)^2}}{\sqrt{r^2 + (z - 2\nu h - \zeta)^2}} f(\zeta) d\zeta \right. \\ \left. + \int_a^b \frac{\exp ik \sqrt{r^2 + (z - 2\nu h + \zeta)^2}}{\sqrt{r^2 + (z - 2\nu h + \zeta)^2}} f(\zeta) d\zeta \right].$$

Wird an Stelle von ζ in den rechts an erster Stelle stehenden Integralen $\zeta + 2\nu h$, in den an zweiter Stelle stehenden $-\zeta + 2\nu h$ als neue Integrationsvariable eingeführt und an ihrer Stelle wieder ζ geschrieben, so nimmt das Potential analytisch die Gestalt an

$$\int_a^b \Pi e^{-i\omega t} f(\zeta) d\zeta \\ = e^{-i\omega t} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{a+2\nu h}^{b+2\nu h} \frac{\exp ik \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \cdot f(\zeta - 2\nu h) d\zeta \right. \\ \left. + \int_{-b+2\nu h}^{-a+2\nu h} \frac{\exp ik \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \cdot f(-\zeta + 2\nu h) d\zeta \right].$$

Mit einer in ζ modulo $2h$ periodischen Funktion $\Phi(\zeta)$ mit folgender Definition in dem Intervall $(-h, +h)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= 0 & \text{für } -h \leq \zeta < -b, \\ \Phi(\zeta) &= f(-\zeta) & \text{für } -b \leq \zeta \leq -a, \\ \Phi(\zeta) &= 0 & \text{für } -a < \zeta < +a, \\ \Phi(\zeta) &= f(\zeta) & \text{für } +a \leq \zeta \leq +b, \\ \Phi(\zeta) &= 0 & \text{für } +b < \zeta \leq +h, \end{aligned}$$

ist demnach

$$\int_a^b \Pi e^{-i\omega t} f(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp i(k \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2} - \omega t)}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \Phi(\zeta) d\zeta \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_0 e^{-i\omega t} \Phi(\zeta) d\zeta.$$

$\Phi(\zeta)$ entspricht einer Dipolverteilung auf einer unendlich langen Antenne, deren Belegungsintensität durch Spiegelung der Verteilung auf der endlichen Antenne an den beiden vollkommen leitenden Ebenen nach den Regeln der geometrischen Optik erhalten wird. Die unendlich lange Antenne mit der Belegung $\Phi(\zeta)$ kann als freischwingend angesehen werden. Nach den vorangegangenen Erörterungen über die Stromstärke in solchen Antennen ist demnach die Stromstärke in der zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen strahlenden Antenne

$$\begin{aligned} J_A(z) &= -c \cos \omega t \frac{\Phi(z-0) + \Phi(z+0)}{2} \\ &= -c \cos \omega t \frac{f(z-0) + f(z+0)}{2}. \end{aligned}$$

Hiernach läßt sich wie in dem bereits behandelten Fall zu jeder vorgegebenen Stromverteilung [die zugehörige Dipolbelegung ermitteln.

Bei der Behandlung von Sonderfällen ist es zweckmäßig, für Π die Entwicklung nach Produkten von trigonometrischen und Hankelschen Funktionen zu benutzen¹⁾, wobei ebenfalls wegen der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht werden kann. Es ergibt sich für das Potential des Strahlungsfeldes der Antenne

$$\begin{aligned} \Pi_A e^{-i\omega t} &= \int_a^b \Pi e^{-i\omega t} f(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_0 e^{-i\omega t} \Phi(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{i\pi}{h} e^{-i\omega t} \left\{ H_0^{(1)}(k_0 r) \int_a^b f(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \cos \frac{\nu\pi z}{h} \cdot H_0^{(1)}(k_\nu r) \int_a^b f(\zeta) \cos \frac{\nu\pi \zeta}{h} d\zeta \right\} \\ &= i\pi e^{-i\omega t} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu H_0^{(1)}(k_\nu r) \cos \frac{\nu\pi z}{h}. \end{aligned}$$

Die Konstanten a_ν sind die Fourierkoeffizienten der Funktion $\Phi(\zeta)$, und zwar gilt die obige Entwicklung ohne Rücksicht darauf, ob $\Phi(\zeta)$ selbst in eine Fouriersche Reihe entwickelbar

1) R. Weyrich, a. a. O. S. 567, Formel (15).

ist oder nicht. Insbesondere ist bei einem Antennenstrom gemäß der Abrahamschen Formel das Potential für das Strahlungsfeld der Antenne

$$\Pi_A e^{-i\omega t} = -A i \pi e^{-i\omega t} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\nu \pi c + \hbar \omega} \cdot \left(\sin \frac{\nu \pi c + \hbar \omega}{\hbar c} b - \sin \frac{\nu \pi c + \hbar \omega}{\hbar c} a \right) \cdot H_0^{(1)}(k_\nu r) \cos \frac{\nu \pi z}{\hbar}.$$

Ein besonderes Interesse verdient der Fall, daß die Antenne das ganze Intervall $(0, \hbar)$ zwischen den beiden vollkommen leitenden Ebenen ausfüllt und die Stromstärke in der Antenne durch die Gleichung gegeben ist

$$J_A = A \cos \frac{n \pi z}{\hbar} \cos \omega t,$$

was sich etwa dadurch erreichen läßt, daß nur ein Segment einer Antenne von passend gewählter Länge mit einer Stromverteilung nach der Abrahamschen Formel in den Raum zwischen den beiden Ebenen zu liegen kommt. Wegen der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen reduziert sich dann das Potential des Strahlungsfeldes der Antenne auf ein einziges Glied

$$\Pi_A e^{-i\omega t} = -\frac{A i \pi}{c} e^{-i\omega t} H_0^{(1)}(k_n r) \cos \frac{n \pi z}{\hbar},$$

und es besteht so die Möglichkeit, die Partialwellen des Spektrums, in welches sich die Strahlung eines Dipols zwischen zwei parallelen reflektierenden Ebenen zerlegen läßt¹⁾, experimentell zu isolieren. Da sich in diesem Falle die Funktion $f(z)$ von selbst als periodische Funktion darbietet und mit $\Phi(z)$ in ihrem ganzen Verlauf übereinstimmt, so ergibt sich andererseits wieder die Zurückführbarkeit gewisser bestimmter Integrale auf Hankelsche Funktionen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp i k \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \cos \frac{n \pi \zeta}{\hbar} d\zeta = i \pi H_0^{(1)}(k_n r) \cos \frac{n \pi z}{\hbar}.$$

Aus der in dem allgemeinen Fall für das Potential des Strahlungsfeldes einer endlichen Vertikalantenne zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen geltenden Formel geht hervor,

1) R. Weyrich, a. a. O S. 569.

daß das Strahlungsfeld qualitativ mit dem eines Dipols bei sonst gleichen Bedingungen übereinstimmt. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Intensitätsverteilung in den beiden sonst übereinstimmenden Spektren, in welche sich die Strahlungen zerlegen lassen, eine andere ist. Daher bleiben die Betrachtungen über die Resonanzerscheinungen und den Energietransport bis auf geringfügige Änderungen die gleichen, z. B. ist der gesamte Transport von Strahlungsenergie durch eine die Antenne umgebende Zylinderfläche in der Zeiteinheit

$$U = \frac{\pi^2 \mu}{h} + \frac{2 \pi^2 \mu}{k^2 h} \sum_{\nu=1}^{\nu=N} a_{\nu}^2 k_{\nu}^2.$$

Die elektromagnetischen Feldgrößen lassen sich aus den Potentialen nach demselben Schema wie bei der Annahme eines Dipols an Stelle der Antenne gewinnen.¹⁾

Brünn, Mathematisches Institut der Deutschen Technischen Hochschule.

1) R. Weyrich, a. a. O. S. 572 ff.

(Eingegangen 31. Juli 1929)

Zur Theorie des Glasziehens und Blasens

Von Heinz Schlechtweg

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — I. Kapitel. Allgemeine Theorie: § 1. Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit mit nicht konstanter innerer Reibung; § 2. Minimalprobleme der Energie in Hydrodynamik und Elastizitätstheorie; § 3. Bewegungsgleichung in einem dünnwandigen Körper. — II. Kapitel. Spezielle Theorie: 1. Abschnitt. Das Ziehen eines Glasrohres. § 4. Spezieller Fall: Das gleichmäßig erwärmte Rohr; § 5. Allgemeiner Fall: Die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten; § 6. Allgemeiner Fall: Das gleichmäßig erwärmte Glasrohr; § 7. Temperaturänderung in Richtung der Rohrachse; § 8. Temperaturänderung senkrecht zur Rohrachse. — 2. Abschnitt. Das Blasen einer Glaskugel. § 9. Spezieller Fall: Die gleichmäßig erwärmte Kugel; § 10. Allgemeiner Fall: Die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten; § 11. Allgemeiner Fall: Die gleichmäßig erwärmte Glaskugel; § 12. Die dünne, gleichmäßig erwärmte Kugel mit zonenweise verschiedener Dicke; § 13. Die dünne, ungleichmäßig erwärmte Kugel mit zonenweise verschiedener Dicke.

Einleitung

Das im folgenden behandelte Problem des Glasziehens und Blasens gehört der Hydrodynamik mit innerer Reibung an. Es ist im speziellen durch folgende Festsetzungen charakterisiert:

1. Die Flüssigkeit sei inkompressibel.
2. Die Geschwindigkeiten seien so klein, daß Trägheitskräfte nicht in Frage kommen;
3. Volumkräfte sind nicht vorhanden.
4. Die Oberflächenkräfte sind vorgeschrieben, zumeist als konstante Normaldrucke (Gasdrucke).
5. Die innere Reibung ist als Funktion des Ortes (Temperaturabfall) gegeben.

Bei den meisten in der Literatur behandelten Problemen sind die Punkte 1—3 erfüllt. Die Oberflächendrucke sind bei allen diesen Problemen nicht vorgegeben, sondern aus dem Problem

selbst zu berechnen; es ist bei ihnen immer die äußere Form vorgeschrieben, wie etwa bei der Strömung einer Flüssigkeit durch einen Zylinder. Behandelt wurden von derartigen Problemen z. B. die stationäre Bewegung einer Flüssigkeit zwischen parallelen Ebenen unter dem Einfluß eines Druckes, die stationäre Strömung einer Flüssigkeit durch eine gerade Röhre mit kreisförmigem Querschnitt, ferner die Rotation einer zwischen coaxialen Zylindern eingeschlossenen Flüssigkeit. Hierher gehören auch die Untersuchungen über die stationäre Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit an einem festen Hindernis vorbei, etwa einer Kugel oder einem Ellipsoid. Bei den von uns hier behandelten Problemen dagegen ändert sich die Form, wie z. B. bei dem Ziehen eines zylindrischen Glasrohres. Bis jetzt noch nicht betrachtet wurde der Ansatz der *inneren Reibung als Funktion des Ortes*.

Die Lösungen der im folgenden behandelten Probleme werden nicht als Funktionen der Zeit gegeben, sondern nur die jeweils auftretenden Geschwindigkeiten berechnet. Die Integration über die Zeit ist nur dann einfach durchzuführen, wenn die Form ihrem Typus nach erhalten bleibt, etwa bei dem Ziehen eines unendlich langen zylindrischen Glasrohres.

L. Kapitel: Allgemeine Theorie

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit den Methoden beschäftigen, die bei den einzelnen Problemen zur Lösung angewandt werden. Wir benutzen dabei die folgenden Größen:

- \mathbf{v} Geschwindigkeitsvektor,
- \mathfrak{B} Tensor des Geschwindigkeitsgradienten, definiert durch:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{v}] + \mathfrak{B} \mathbf{r} + \dots$$

bzw.

$$V_{xz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

$$V_{xy} = V_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad \text{usw.}$$

- \mathfrak{P} Spannungstensor,
- $|\mathfrak{P}|$ Spur des Spannungstensors,
- \mathfrak{E} Einheitstensor,
- ρ Dichte der Oberflächenkraft,

- n Normalenvektor der Oberfläche, nach außen gerichtet,
 \bar{f} Dichte der Volumenkraft,
 \bar{f} Flächendichte der aus Oberflächenkräften und Volumenkräften resultierenden Gesamtkraft in dünnen Schalen,
 p hydrostatischer Druck,
 η innere Reibung,
 ϱ Dichte,
 D Dicke einer Schale.

§ 1. Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit mit nicht konstanter innerer Reibung

Durch den Übergang von der Elastizitätstheorie der isotropen Medien zur Hydrodynamik erhält man¹⁾:

$$\varrho \frac{dv}{dt} = \bar{f} + \operatorname{div} \left(\mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{P}|}{3} + 2\eta \mathfrak{B}' \right),$$

wobei:

$$(1) \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \frac{1}{3} \operatorname{div} v \mathfrak{E}$$

ist. Da die auftretenden Geschwindigkeiten klein sein sollen, Volumenkräfte nicht existieren sollen und Trägheitskräfte nicht in Frage kommen sollen, vereinfacht sich die obige Gleichung zu:

$$\operatorname{div} \left(\mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{P}|}{3} + 2\eta \mathfrak{B}' \right) = 0.$$

Wegen²⁾

$$\frac{|\mathfrak{P}|}{3} = -p$$

wird hieraus:

$$\operatorname{grad} p = 2 \operatorname{div} \left(\eta \mathfrak{B} - \eta \frac{\operatorname{div} v}{3} \mathfrak{E} \right).$$

Es ist:

$$\operatorname{div} (\eta \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta + \frac{1}{3} \eta (\Delta v + \operatorname{grad} \operatorname{div} v).$$

Ferner ist:

$$\operatorname{div} (\eta \operatorname{div} v \mathfrak{E}) = \operatorname{div} v \operatorname{grad} \eta + \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} v.$$

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl., S. 187; 2. Aufl. S. 209.

2) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl., S. 184, 2. Aufl. S. 205.

Also heißt in unserem Fall die *Bewegungsgleichung*:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grad } p = 2 \mathfrak{B} \text{ grad } \eta + \eta (\Delta \mathfrak{v} + \text{grad div } \mathfrak{v}) \\ \quad - \frac{2}{3} \text{div } \mathfrak{v} \text{ grad } \eta - \frac{2}{3} \eta \text{ grad div } \mathfrak{v} . \end{array} \right.$$

Da wegen der vorausgesetzten Inkompressibilität

$$\text{div } \mathfrak{v} = 0$$

ist, so vereinfacht sich die letztere Gleichung zu:

$$(3) \quad \text{grad } p = 2 \mathfrak{B} \text{ grad } \eta - \eta \text{ rot rot } \mathfrak{v} .$$

Um die durch die Oberflächendrucke gegebene Randbedingung

$$p = \mathfrak{P} n$$

erfüllen zu können, braucht man den Zusammenhang zwischen den Tensoren \mathfrak{P} und \mathfrak{B} . Man bekommt ihn folgendermaßen; es ist:¹⁾

$$(4) \quad \mathfrak{P} = -p \mathfrak{E} + 2 \eta \mathfrak{B}' .$$

Wegen Formel (1) wird hieraus unter Benutzung der Inkompressibilität:

$$(5) \quad \mathfrak{P} = -p \mathfrak{E} + 2 \eta \mathfrak{B} .$$

In dem nächsten Paragraphen werden wir dieses Ergebnis anwenden, um eine Verallgemeinerung des Helmholtzschen Satzes über die Energiedissipation zu beweisen.

§ 2. Minimalprobleme der Energie in Hydrodynamik und Elastizitätstheorie

Wir zeigen zunächst die Verallgemeinerung des Helmholtzschen Satzes über die Energiedissipation für Flüssigkeiten, deren innere Reibung Funktion des Ortes ist. Ebenso wie in dem Fall, daß η eine Konstante ist, erkennt man, daß die Dissipation der Energie für inkompressible Flüssigkeiten gegeben wird durch²⁾:

$$2 \int d V \eta (\mathfrak{B}^2) ,$$

wo (\mathfrak{B}^2) das skalare Produkt von \mathfrak{B} mit sich selbst bedeutet:

$$(\mathfrak{B}^2) = V_{xx}^2 + V_{yy}^2 + V_{zz}^2 + 2 V_{xy}^2 + 2 V_{xz}^2 + 2 V_{yz}^2 .$$

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 187, 2. Aufl. S. 209.

2) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Deutsche Ausgabe 1907, S. 668.

Da die Oberflächendrucke vorgeschrieben sind, so ist zu zeigen, daß der Überschuß der *Energiedissipation* über den doppelten Betrag der von den Oberflächenkräften geleisteten Arbeit ein Minimum ist¹⁾, also:

$$\delta \left(2 \int dV \eta (\mathfrak{B}^2) - 2 \int dF (p v) \right) = 0,$$

wobei

$$p = \mathfrak{P} n$$

auf der Oberfläche gegeben ist. Bezeichnen wir die Hälfte des zu variierenden Ausdruckes mit Q , so ist

$$\delta Q = 2 \int dV \eta (\mathfrak{B} \delta \mathfrak{B}) - \int dF ((p \delta v) + (v \delta p)).$$

Da auf der Oberfläche p vorgeschrieben ist, so ist dort $\delta p = 0$; also ist:

$$\delta Q = 2 \int dV \eta (\mathfrak{B} \delta \mathfrak{B}) - \int dF (p \delta v).$$

Das auf der rechten Seite stehende Volumenintegral formen wir durch partielle Integration um, d. h. wir wollen den Gauss'schen Satz anwenden; dies geht sofort, wenn wir von \mathfrak{B} zu \mathfrak{P} übergehen vermöge der Beziehung (1, 5).²⁾ Es ist dann:

$$(\mathfrak{P} \delta \mathfrak{B}) = -p \operatorname{div} \delta v + 2\eta (\mathfrak{B} \delta \mathfrak{B}).$$

Wegen der Inkompressibilität ist:

$$\operatorname{div} \delta v = \delta \operatorname{div} v = 0.$$

Also ist

$$\delta Q = \int dV (\mathfrak{P} \delta \mathfrak{B}) - \int dF (p \delta v).$$

Es ist³⁾

$$(\mathfrak{P} \delta \mathfrak{B}) = \operatorname{div} (\mathfrak{P} \delta v) - (\delta v \operatorname{div} \mathfrak{P}).$$

Nun ist aber⁴⁾

$$\operatorname{div} \mathfrak{P} = \operatorname{div} \left(\mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{P}|}{3} + 2\eta \mathfrak{B} \right) = 0.$$

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Deutsche Ausgabe 1907, S. 692.

2) Wird auf eine frühere Formel zurückverwiesen, so bedeutet die erste Zahl den Paragraphen, und die zweite Zahl gibt die Nummer der Formel in diesem Paragraphen an; z. B. (1, 5) heißt Formel (5) von § 1.

3) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 2. Aufl. S. 168.

4) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 187, 2. Aufl. S. 209.

Dann ist

$$\delta Q = \int dF (n \mathfrak{P} \delta v) - \int dF (p \delta v).$$

Wegen der Symmetrie des Spannungstensors folgt hieraus

$$\delta Q = \int dF (\delta v \mathfrak{P} n) - \int dF (p \delta v).$$

Wegen der Oberflächenbedingung

$$p = \mathfrak{P} n$$

ist dann

$$\delta Q = 0.$$

Hiermit ist der Beweis geführt.

Nun wollen wir den *Zusammenhang* erkennen, der *zwischen diesem Minimalproblem und der Gleichung (1, 2)* besteht. Wir betrachten zuerst das dem hydrodynamischen Problem entsprechende elastische Problem, da hier die Verhältnisse einfacher sind. Die elastische Energie ist, wenn \mathfrak{E} der Deformationstensor ist:

$$\frac{1}{2} \int dV (\mathfrak{P} \mathfrak{E}).$$

Ist E der Elastizitätskoeffizient, μ der Querkontraktionskoeffizient und κ die Kompressibilität, und setzt man:¹⁾

$$\alpha = \frac{1-2\mu}{E} = -\frac{\kappa}{3} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1+\mu}{E},$$

so ist wegen:²⁾

$$(1) \quad \mathfrak{P} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |\mathfrak{E}| \mathfrak{E} + \frac{1}{\beta} \mathfrak{E},$$

$$\int dV (\mathfrak{P} \mathfrak{E}) = \int dV \left\{ \frac{1}{\beta} (\mathfrak{E}^2) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |\mathfrak{E}|^2 \right\}.$$

Setzt man entsprechend dem hydrodynamischen Problem, wenn \mathfrak{f} die Verschiebung bedeutet:

$$Q = \int dV (\mathfrak{P} \mathfrak{E}) - 2 \int dF (p \mathfrak{f}),$$

so ist zu zeigen, daß unter der Voraussetzung, daß $p = \mathfrak{P} n$ auf der Oberfläche gegeben ist, das Variationsproblem äquivalent ist mit der Grundgleichung³⁾:

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 185, 2. Aufl. S. 206.

2) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 185, 2. Aufl. S. 207.

3) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 186, 2. Aufl. S. 208.

$$(2) \quad 0 = \frac{1}{2\beta} \Delta \mathfrak{f} + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \text{grad div } \mathfrak{f}.$$

Aus der Forderung $\delta \mathfrak{p} = 0$ auf der Oberfläche ergibt sich aus (1) eine Vorschrift für $\delta \mathfrak{f}$ auf der Oberfläche.

Die Durchführung der Variation ergibt

$$\delta Q = - \int dV \left(\delta \mathfrak{f}, \frac{1}{\beta} \Delta \mathfrak{f} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \text{grad div } \mathfrak{f} \right) \\ + \int dF \left\{ \frac{2}{\beta} (\mathfrak{n} \mathfrak{E} \delta \mathfrak{f}) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) (\mathfrak{n} \delta \mathfrak{f}) \text{div } \mathfrak{f} - 2 (\mathfrak{p} \delta \mathfrak{f}) \right\}.$$

Nun ist aber¹⁾

$$\mathfrak{E} \mathfrak{n} = \frac{\alpha - \beta}{3} |\mathfrak{P}| \mathfrak{n} + \beta \mathfrak{P} \mathfrak{n}.$$

Da ferner²⁾

$$\text{div } \mathfrak{f} = |\mathfrak{E}|$$

und³⁾

$$|\mathfrak{E}| = \alpha |\mathfrak{P}|,$$

so ergibt sich:

$$\delta Q = - \int dV \left(\delta \mathfrak{f}, \frac{1}{\beta} \Delta \mathfrak{f} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \text{grad div } \mathfrak{f} \right).$$

Wegen $\delta Q = 0$ ergibt sich hieraus die Grundgleichung (2); also ist das betrachtete Minimalproblem mit der Grundgleichung äquivalent.

Nun gehen wir zu dem etwas schwierigeren hydrodynamischen Problem über. Wir betrachten hier gleich allgemein den Fall der nicht inkompressiblen Flüssigkeit. Das Variationsproblem lautet dann hier:

$$\delta \left(\int dV (\mathfrak{P} \mathfrak{B}) - 2 \int dF (\mathfrak{p} \mathfrak{v}) \right) = 0$$

mit der Oberflächenbedingung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \mathfrak{n}.$$

Dabei ist, wie aus den Formeln (1, 4) und (1, 1) folgt:

$$(3) \quad \mathfrak{P} = -p \mathfrak{E} - \frac{2}{3} \eta \text{div } \mathfrak{v} \mathfrak{E} + 2\eta \mathfrak{B}.$$

Um angeben zu können, was $\delta \mathfrak{p} = 0$ für $\delta \mathfrak{v}$ auf der Oberfläche bedeutet, muß man den funktionellen Zusammenhang von \mathfrak{p} und \mathfrak{v} kennen, der bei dem elastischen Problem durch die

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 185, 2. Aufl. S. 207.

2) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 183, 2. Aufl. S. 204.

3) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 185, 2. Aufl. S. 206.

Formel (1) gegeben ist. Hier ist nun aber der hydrostatische Druck p in seiner Abhängigkeit von dem Vektor \mathbf{v} nicht bekannt, da es ein dem Elastizitätsgesetz $|\mathfrak{S}| = \alpha |\mathfrak{P}|$ entsprechendes hydrodynamisches Gesetz $|\mathfrak{B}| = \alpha |\mathfrak{P}|$ nicht gibt, weil ja sonst eine inkompressible Flüssigkeit stets den hydrostatischen Druck Null haben müßte. Die obige Problemstellung hat also keinen Sinn, da man, ohne p zu kennen, die Oberflächenbedingung überhaupt nicht angeben kann; es ist nämlich auch nicht möglich, aus Gleichung (3) selbst den hydrostatischen Druck zu bestimmen. Es ist jedoch eine Ausrechnung von p möglich, wenn man Formel (3) abändert in:

$$(4) \quad \mathfrak{P} = -\gamma p \mathfrak{E} - \frac{2}{3} \varepsilon \eta \operatorname{div} \mathbf{v} \mathfrak{E} + 2 \eta \mathfrak{B},$$

wobei γ und ε zwei voneinander verschiedene, nahe bei 1 gelegene Zahlen sind. Macht man den Grenzübergang $\gamma \rightarrow 1$, $\varepsilon \rightarrow 1$, so ergibt sich hieraus die Formel (3). Aus (4) läßt sich p berechnen; durch skalare Multiplikation mit dem Einheits-tensor \mathfrak{E} ergibt sich:

$$(5) \quad 3 p (\gamma - 1) = 2 \eta (1 - \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$(5') \quad p = \frac{2}{3} \eta \frac{1 - \varepsilon}{\gamma - 1} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Jetzt liegen dieselben Verhältnisse wie in der Elastizitätstheorie vor; denn dem Ansatz $|\mathfrak{S}| = \alpha |\mathfrak{P}|$ entspricht hier jetzt $|\mathfrak{B}| = \alpha |\mathfrak{P}|$, und dabei ist

$$\alpha = \frac{1}{2 \eta} \frac{\gamma - 1}{\varepsilon - 1}.$$

Zu bemerken ist, daß dies letztere Gesetz in der Grenze $\gamma = \varepsilon = 1$ nichts besagt, da dann die Gleichung (5) trivialerweise erfüllt ist. Aus (5') ergibt sich durch Einsetzen in (4):

$$(6) \quad \mathfrak{P} = -\frac{2}{3} \eta \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma - 1} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathfrak{E} + 2 \eta \mathfrak{B}.$$

Fordert man also $\delta p = 0$ auf der Oberfläche, so folgt hieraus eine Vorschrift von $\delta \mathbf{v}$ an der Oberfläche. Jetzt ist also das Minimalproblem

$$\delta \left(\int dV (\mathfrak{P} \mathfrak{B}) - 2 \int dF (p \mathbf{v}) \right) = 0,$$

mit der Oberflächenbedingung:

$$p = \mathfrak{P} \mathbf{n}$$

ein ebenso sinnvolles wie das entsprechende elastische Problem.

Die Durchführung der Variation ergibt:

$$\begin{aligned} \int dV \left(\delta v, -\eta \Delta v - \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} v - 2\mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma - 1} \operatorname{grad} (\eta \operatorname{div} v) \right) + \int dF \left\{ 2\eta (\delta v \mathfrak{B} n) \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma - 1} \eta \operatorname{div} v (n \delta v) - (p \delta v) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Unter Benutzung von Gleichung (6) und der Oberflächenbedingung $p = \mathfrak{B} n$ erkennt man, daß das Oberflächenintegral verschwindet. Es bleibt also übrig

$$\begin{aligned} \int dV \left(\delta v, -\eta \Delta v - \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} v - 2\mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma - 1} \operatorname{grad} (\eta \operatorname{div} v) + \frac{2}{3} \operatorname{grad} (\eta \operatorname{div} v) \right) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{3} \frac{1 - \varepsilon}{\gamma - 1} \operatorname{grad} (\eta \operatorname{div} v) - \eta \Delta v - \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} v - 2\mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta \\ &+ \frac{2}{3} \operatorname{div} v \operatorname{grad} \eta + \frac{2}{3} \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} v = 0. \end{aligned} \right.$$

Gleichung (7) und Gleichung (5) liefern dann die Geschwindigkeit und den hydrostatischen Druck als Funktionen des Ortes und den Parametern γ und ε . Macht man den Grenzübergang $\gamma \rightarrow 1$, $\varepsilon \rightarrow 1$, so wird aus Gleichung (7) die Bewegungsgleichung (1, 2). Aus ihr bestimmt sich jetzt der hydrostatische Druck; da Gleichung (5) jetzt bedeutungslos wird, so braucht man eine andere Gleichung für $\operatorname{div} v$; an Stelle von Gleichung (5) tritt jetzt die Kontinuitätsgleichung.

Der Unterschied von Elastizitätstheorie und Hydrodynamik läßt sich also von diesem Standpunkt aus auf folgende Weise charakterisieren. Bei dem Grenzübergang von der Elastizitätstheorie zur Hydrodynamik verliert das Gesetz $|\mathfrak{S}| = \alpha |\mathfrak{P}|$ seinen Sinn, und es wird durch die Kontinuitätsgleichung ersetzt.

§ 3. Die Bewegungsgleichung in einem dünnwandigen Körper

Wir kehren nunmehr zu dem hydrodynamischen Problem des Glasziehens und Blasens zurück. Für dünnwandige Körper

läßt sich das Problem vereinfachen. Wir betrachten hier die Bewegung einer infinitesimal dünnen Schale von der Dicke D unter der Wirkung von Oberflächenkräften. Um die Bewegung zu beschreiben, führen wir ein orthogonales Koordinatensystem der x^1, x^2, x^3 ein, bei dem die x^2 und x^3 -Linien das orthogonale Netz der Krümmungslinien der beiden Begrenzungsflächen bilden.¹⁾ Sind $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ die physikalischen Komponenten²⁾ des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} , und bedeutet \dot{D} den zeitlichen Differentialquotienten der Dicke, so ist, da Inkompressibilität herrscht:

$$(1) \quad D \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x^1} = \dot{D}.$$

Die Inkompressibilitätsbedingung $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ lautet hier wegen³⁾

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{v}_i}{e_i} \right),$$

wo e_1, e_2, e_3 die Grundvektoren des Koordinatensystems sind und $\sqrt{g} = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3$:

$$e_2 e_3 \frac{\dot{D}}{D} + \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} (e_2 e_3) + \sum_{i=2}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{v}_i}{e_i} \right) = 0.$$

Sind also die physikalischen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bekannt, so läßt sich hieraus die relative Dickenänderung entnehmen. Hiermit ist die Kinematik des Vorgangs erledigt.

Um das Problem zu vereinfachen, wollen wir eine solche Strömung in der dünnen Schale betrachten, deren *Geschwindigkeit von der Koordinate x^1 nicht abhängt*.

Wir denken uns zunächst noch einmal einen nicht infinitesimal dünnen Körper; kommt er unter die Wirkung von gewissen Oberflächenkräften, so entsteht in ihm ein gewisser Strömungszustand; will man in dem Körper eine von einer gewissen Koordinate unabhängige Strömung bekommen, so hat man unter Umständen eine sehr komplizierte Kräfteverteilung anzusetzen, z. B. wenn die Strömung zwischen zwei parallelen Platten unabhängig sein soll von der Koordinate senkrecht zu

1) E. Blaschke, Differentialgeometrie, 2. Aufl., 1. Bd., S. 65.

2) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 150, 2. Aufl. S. 177.

3) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

den beiden Platten. Nimmt man jedoch einen Körper von sehr dünner Wandstärke an, so werden die Verhältnisse einfacher. Denkt man sich nämlich die Oberflächenkräfte teilweise auch als Volumenkräfte in der dünnen Schale angreifend, so wird der Unterschied der durch diese Kräfteverteilung hervorgerufenen Strömung gegenüber der durch reine Oberflächenkräfte bedingten nur infinitesimal klein, weil durch die genannte Substitution der Angriffspunkt der Kräfte nur infinitesimal verschoben wird. Wir machen gerade diese Substitution, da für sie die mathematische Behandlung einfach wird. Wir fassen dann das gesamte Kräftesystem zu einer Gesamtkraft zusammen; ist in diesem Kräftesystem p_i die Dichte der innen wirkenden Oberflächenkraft und p_a die der außen wirkenden, so ist, wenn dF das Flächenelement der Angriffsfläche bedeutet:¹⁾

$$\mathfrak{f} dF = p_i dF - p_a dF + dF \int \mathfrak{f} dx^1.$$

Wegen

$$0 = \mathfrak{f} + \operatorname{div} \mathfrak{P}$$

wird hieraus

$$\mathfrak{f} dF = p_i dF - p_a dF - dF \int \operatorname{div} \mathfrak{P} dx^1.$$

Da die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, also auch die des Spannungstensors von x^1 nicht abhängen, so ist

$$\mathfrak{f} = p_i - p_a - D \cdot \operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

Also ist wegen der infinitesimal kleinen Dicke der Schale, wenn die Überstreichung wieder physikalische Komponenten andeutet

$$\bar{k}_i = D \cdot \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x^i} - D \operatorname{div}_i \mathfrak{P} \quad (i = 1, 2, 3),$$

da aber $p = \mathfrak{P} n$ ist und wegen der infinitesimal kleinen Schwankung der Dicke $\bar{n}_1 = 1, \bar{n}_2 = \bar{n}_3 = 0$ gesetzt werden kann, so ist

$$\dot{p}_i = P_{1i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Also sind die Bewegungsgleichungen

$$(2) \quad \bar{k}_i = D \frac{\partial P_{1i}}{\partial x^1} - D \operatorname{div}_i \mathfrak{P}.$$

Nun ist aber²⁾

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 184, 2. Aufl. S. 205.

2) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

$$\overline{\text{div}_i \mathfrak{P}} = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \frac{\overline{P_{ir}}}{e_i e_r} \right) + \sum_{r=1}^3 \frac{2 \overline{P_{ir}}}{e_i e_r} \frac{\partial e_i}{\partial x^r} - \sum_{r=1}^3 \frac{\overline{P_{rr}}}{e_i e_r} \frac{\partial e_r}{\partial x^i}.$$

Die Ableitung von $\overline{P_{i1}}$ kommt hierin nur vor in der Verbindung $\frac{1}{e_i} \frac{\partial \overline{P_{i1}}}{\partial x^1}$; da aber die x^1 -Linien Geraden sind, so ist $e_1 = 1$.

Also fällt aus $\overline{k_i}$ das Glied mit $D \frac{\partial \overline{P_{i1}}}{\partial x^1}$ heraus; es kommen also

in den Bewegungsgleichungen keine Ableitungen der physikalischen Komponenten des Spannungstensors nach x^1 vor. — Unter der Annahme, daß auf die Schale von innen und außen ein konstanter Druck ausgeübt wird, ist der hydrostatische Druck gleich der Druckdifferenz. Auch dieser hebt sich überall in den Bewegungsgleichungen heraus. Man kann sich also in speziellen Fällen eine kleine Erleichterung der Rechnung verschaffen, indem man dem hydrostatischen Druck den Wert Null beilegt. Wir haben dann in den Bewegungsgleichungen und der Inkompressibilitätsbedingung vier Gleichungen für $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ und \dot{D}/D .

II. Kapitel: Spezielle Theorie

1. Abschnitt: Das Ziehen eines Glasrohres

§ 4. Spezieller Fall: Das gleichmäßig erwärmte Rohr

Wir betrachten hier, wie auch stets im folgenden, ein gerades kreiszylindrisches Rohr. Die Achse des Rohres falle mit der z -Achse des Koordinatensystems zusammen; der Nullpunkt des Koordinatensystems befinde sich in der Mitte des Rohres. Die Richtung der Projektion der Geschwindigkeit in die (x, y) -Ebene ist rein radial; es gilt also

$$v_x : v_y = x : y.$$

Ist $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, so machen wir den *speziellen Ansatz*:

$$v_x = x \cdot f(\varrho),$$

$$v_y = y \cdot f(\varrho),$$

$$v_z = a \cdot z.$$

Wegen der Inkompressibilität ist $\text{div } \mathbf{v} = 0$, oder

$$2f + \varrho f' + a = 0,$$

wo der beigefügte Strich die Differentiation nach dem Argument andeutet. Dies ist

$$f = -\frac{a}{2} + \frac{c}{\varrho^3}.$$

Also sind die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = -a \frac{x}{2} + c \frac{x}{\varrho^3},$$

$$v_y = -a \frac{y}{2} + c \frac{y}{\varrho^3},$$

$$v_z = a z.$$

Mit dieser Lösung haben wir die Bewegungsgleichung zu erfüllen, die sich hier reduziert auf

$$\text{grad } p = -\eta \text{ rot rot } \mathbf{v}.$$

Wie man durch Nachrechnen erkennt, ist schon $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Der hydrostatische Druck ist also eine Konstante.

Die noch verfügbaren Konstanten a , c und p bestimmen sich durch die *Randbedingungen*. Ist R_i der innere und R_a der äußere Radius des Rohres, v_z der Wert von v_z an der Stelle $z = L$, wo L die Länge des Rohres ist, p_i der auf die innere Rohrwand wirkende Druck und p_a der auf die äußere Rohrwand wirkende, so ist:

$$p_i = -P_{zz} (x = \varrho = R_i; y = 0; z = 0),$$

$$p_a = -P_{zz} (x = \varrho = R_a; y = 0; z = 0),$$

$$\bar{v}_z = v_z (z = L).$$

Unter Benutzung der Beziehung

$$\mathfrak{P} = -p \mathfrak{E} + 2\eta \mathfrak{B}$$

ergibt sich

$$v_x = -\frac{x}{2} \frac{\bar{v}_z}{L} - \frac{x}{\varrho^3} \frac{R_i^3 R_a^3}{R_i^3 - R_a^3} \frac{p_i - p_a}{2\eta},$$

$$v_y = -\frac{y}{2} \frac{\bar{v}_z}{L} - \frac{y}{\varrho^3} \frac{R_i^3 R_a^3}{R_i^3 - R_a^3} \frac{p_i - p_a}{2\eta},$$

$$v_z = z \frac{\bar{v}_z}{L}.$$

Ist speziell der innere Druck gleich dem äußeren Druck, so ist $c = 0$; in diesem Fall ergibt sich aus den Geschwindigkeitskomponenten, daß die Querkontraktion konstant ist und zwar $\frac{1}{2}$.

§ 5. Allgemeiner Fall: Die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten

Die allgemeine Bewegungsgleichung ist nach (1, 3):

$$(1) \quad \text{grad } p = 2 \mathfrak{B} \text{ grad } \eta - \eta \text{ rotrot } \mathfrak{v}.$$

Durch Anwendung der Operation rot hierauf gewinnt man eine Differentialgleichung für \mathfrak{v} :

$$\text{rot } (\eta \text{ rotrot } \mathfrak{v}) = 2 \text{ rot } \mathfrak{B} \text{ grad } \eta$$

oder¹⁾

$$(2) \quad \eta \text{ rotrotrot } \mathfrak{v} = [\text{rotrot } \mathfrak{v} \text{ grad } \eta] + 2 \text{ rot } \mathfrak{B} \text{ grad } \eta.$$

Für den speziellen Fall des Ziehens eines kreiszylindrischen Glasrohres machen wir nun den folgenden *allgemeinen Ansatz*. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} v_\varrho &= \varrho \, \dot{f}(\varrho, z), \\ v_\varphi &= 0, \\ v_z &= h(\varrho, z), \end{aligned}$$

wobei ϱ, φ, z Zylinderkoordinaten bezeichnen. Wir bilden zunächst $\text{rotrot } \mathfrak{v}$, und zwar rechnen wir in physikalischen Komponenten; es ist allgemein²⁾

$$\text{rotrot}_i \mathfrak{v} = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \frac{\frac{\partial}{\partial x^r} (\bar{v}_i e_i) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{v}_r e_r)}{e_i^2 e_r^2} \right).$$

In unserem Fall³⁾ ist

$$\begin{array}{lll} x^1 = \varrho & x^2 = \varphi & x^3 = z \\ e_1 = 1 & e_2 = \varrho & e_3 = 1 \\ \bar{v}_1 = v_\varrho & \bar{v}_2 = v_\varphi & \bar{v}_3 = v_z. \end{array}$$

Nun bilden wir die Komponenten von $\text{rotrotrot } \mathfrak{v}$; allgemein ist³⁾

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 133, 2. Aufl. S. 156.

2) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

3) E. Madelung, a. a. O. 1. Aufl. S. 156, 2. Aufl. S. 183.

$$\operatorname{rot}_{\varphi} \mathfrak{a} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varphi}}{\partial z}; \quad \operatorname{rot}_{\varphi} \mathfrak{a} = \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial \varrho};$$

$$\operatorname{rot}_z \mathfrak{a} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \mathfrak{a}_{\varphi}) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho}}{\partial \varphi}.$$

Dann ist

$$\operatorname{rotrotrot}_{\varrho} \mathfrak{b} = 0; \quad \operatorname{rotrotrot}_z \mathfrak{b} = 0.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rotrotrot}_{\varphi} \mathfrak{v} = & \frac{\partial^2 v_{\varrho}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varrho \partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 v_{\varrho}}{\partial \varrho^2 \partial z} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v_{\varrho}}{\partial \varrho \partial z} \\ & + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Nun bilden wir die Komponenten von $\mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta$ in Zylinderkoordinaten; dazu bilden wir zunächst die physikalischen Komponenten des Tensors \mathfrak{B} . Es ist¹⁾

$$\overline{V}_{i\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_i}{e_{\kappa}} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \frac{v_i}{e_i} + \frac{e_{\kappa}}{e_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{v_{\kappa}}{e_{\kappa}} \right) + \frac{(i\kappa)}{e_{\kappa}} \sum_{r=1}^3 \frac{\overline{v}_r}{e_r} \frac{\partial e_{\kappa}}{\partial x^r}.$$

Dabei ist

$$(i\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = \kappa, \\ 0 & \text{für } i \neq \kappa. \end{cases}$$

Nehmen wir an, daß η nur Funktion von ϱ und z ist, dagegen nicht von φ , so ist, da²⁾

$$\overline{\operatorname{grad}_i \varphi} = \frac{1}{e_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

$$\operatorname{rot}_{\varrho} \mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta = 0; \quad \operatorname{rot}_z \mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_{\varphi} \mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_{\varrho}}{\partial \varrho \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varrho^2} \right) \eta_{\varrho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_{\varrho}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varrho \partial z} \right) \eta_z \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\varrho}}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} \right) \eta_{\varrho\varrho} + \left(\frac{\partial v_{\varrho}}{\partial \varrho} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \eta_{\varrho z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\varrho}}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} \right) \eta_{zz}. \end{aligned}$$

Nun bilden wir $[\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]$; es ist³⁾

$$[\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]_{\varrho} = [\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]_x \frac{x}{\varrho} + [\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]_y \frac{y}{\varrho},$$

$$[\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]_{\varrho} = \operatorname{rotrot}_{\varphi} \mathfrak{b} \operatorname{grad}_z \eta - \operatorname{rotrot}_z \mathfrak{b} \operatorname{grad}_{\varphi} \eta.$$

Also ist

$$[\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]_{\varrho} = 0, \text{ analog } [\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]_z = 0 \quad \text{und}$$

$$[\operatorname{rotrot} \mathfrak{b} \operatorname{grad} \eta]_{\varphi} = \operatorname{rotrot}_z \mathfrak{b} \operatorname{grad}_{\varrho} \eta - \operatorname{grad}_z \eta \operatorname{rotrot}_{\varrho} \mathfrak{b}.$$

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

2) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 151, 2. Aufl. S. 178.

3) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 156, 2. Aufl. S. 183.

Unter Benutzung der Funktionen f und h ergibt sich durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung (2) die folgende partielle Differentialgleichung für f und h :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varrho f_{zzz} + \varrho f_{\varrho z z} + 3f_{\varrho z} - h_{\varrho z z} - h_{\varrho \varrho \varrho} - \frac{1}{\varrho} h_{\varrho \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} h_{\varrho} \\ & = \frac{\eta_{\varrho}}{\eta} \left(\frac{h_{\varrho}}{\varrho} - f_z \right) - \frac{\eta_{\varrho \varrho}}{\eta} (\varrho f_z + h_{\varrho}) + \frac{2\eta_{\varrho z}}{\eta} (f + \varrho f_{\varrho} - h_z) \\ & + \frac{\eta_{zz}}{\eta} (\varrho f_z + h_{\varrho}). \end{aligned} \right.$$

Nimmt man hierzu noch die Inkompressibilitätsbedingung $\text{div } \mathbf{v} = 0$, so hat man als zweite Gleichung für f und h :

$$(4) \quad 2f + \varrho f_{\varrho} + h_z = 0.$$

Zu bemerken ist, daß in (5, 3) die Funktion η_z nicht vorkommt; es scheint also so, als ob die Geschwindigkeitsverteilung bei konstantem η ebenso sei wie bei von z linear abhängigem η ; dies ist jedoch nicht der Fall, da die in der Lösung auftretenden Konstanten mit Hilfe des hydrostatischen Druckes bestimmt werden, in den die Abhängigkeit der Funktion η von z eingeht (vgl. § 7).

§ 6. Allgemeiner Fall: Das gleichmäßig erwärmte Glasrohr

Hier ist η eine Konstante; es vereinfacht sich dann die zwischen den Funktionen f und h bestehende Gleichung (5, 3) zu

$$(1) \quad \varrho f_{zzz} + \varrho f_{\varrho z z} + 3f_{\varrho z} - h_{\varrho z z} - h_{\varrho \varrho \varrho} - \frac{1}{\varrho} h_{\varrho \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} h_{\varrho} = 0,$$

die Gleichung (5, 4) bleibt

$$(2) \quad 2f + \varrho f_{\varrho} + h_z = 0.$$

Zur Lösung dieser beiden Differentialgleichungen machen wir den Ansatz:

$$(3) \quad f(\varrho, z) = F_0(\varrho) + \sum_{n \neq 0} e^{nz} F_n(\varrho); \quad h(\varrho, z) = az + \sum_{n \neq 0} e^{nz} H_n(\varrho).$$

Aus Gleichung (2) wird dann

$$(4) \quad 2F_n + \varrho F_n' + n H_n = 0.$$

Aus Gleichung (1) gewinnt man unter Benutzung von (4) die folgende Gleichung für F_n :

$$\varrho F_n^{IV} + 6 F_n''' + F_n'' \left(\frac{3}{\varrho} + 2n^2 \varrho \right) + F_n' \left(-\frac{3}{\varrho^2} + 6n^2 \right) + \varrho n^4 F_n = 0.$$

In dem Fall $n \neq 0$ definiert man

$$W_n = \varrho F_n'' + 3 F_n' + n^2 \varrho F_n.$$

Die Differentialgleichung für F_n läßt sich dann in der folgenden Form schreiben:

$$W_n'' + \frac{1}{\varrho} W_n' + \left(n^2 - \frac{1}{\varrho^2} \right) W_n = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat natürlich die triviale Lösung

$$W_n^{(1)} = 0$$

und außerdem die allgemeine Lösung

$$W_n^{(2)} = \mathfrak{Z}_1^{(n)}(n\varrho),$$

wobei \mathfrak{Z}_1 eine allgemeine Zylinderfunktion erster Ordnung bedeutet; der obere Index n soll dabei andeuten, daß die in ihr steckenden beiden Konstanten noch von n abhängen. In dem ersten Fall ist F_n eine Lösung der Differentialgleichung:

$$F_n'' + \frac{3}{\varrho} F_n' + n^2 F_n = 0,$$

also:¹⁾

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{\varrho} \mathfrak{Z}_1^{(n)}(n\varrho).$$

Dabei soll die Überstreichung eine Zylinderfunktion mit anderen Konstanten als $\mathfrak{Z}_1^{(n)}(n\varrho)$ bedeuten. In dem zweiten Fall ist F_n eine Lösung der Differentialgleichung:

$$F_n'' + \frac{3}{\varrho} F_n' + n^2 F_n = \frac{1}{\varrho} \mathfrak{Z}_1^{(n)}(n\varrho).$$

Sie wird gelöst durch

$$F_n^{(2)} = -\frac{1}{2n} \mathfrak{Z}_0^{(n)}(n\varrho).$$

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 36, 2. Aufl. S. 63.

Also ist:

$$v_e = \varrho f(\varrho, z) = -\frac{a\varrho}{2} + \frac{c}{\varrho} + \sum_n e^{nz} \left\{ \overline{\mathfrak{B}}_1^{(n)}(n\varrho) - \frac{\varrho}{2n} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n\varrho) \right\}.$$

In dieser Lösung sind $4n + 2$ Konstanten enthalten, die aus den Oberflächen- und Randbedingungen zu bestimmen sind.

Unter Benutzung von Gleichung (4) ergibt sich

$$v_i = h(\varrho, z) = az - \sum_n e^{nz} \left\{ \overline{\mathfrak{B}}_0^{(n)}(n\varrho) - \frac{1}{n^2} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n\varrho) + \frac{\varrho}{2n} \mathfrak{B}_1^{(n)}(n\varrho) \right\}.$$

Hierin kommen dieselben Konstanten wie in v_e vor, mit Ausnahme von c .

Um die Konstanten zu bestimmen, betrachten wir zuerst die Oberflächenbedingungen. Ist R_i der innere und R_a der äußere Radius des Rohres, p_i der auf die innere Rohrwand wirkende Druck und p_a der auf die äußere Rohrwand wirkende, so ist

$$(5) \quad \begin{cases} p_{ie} = -P_{ee}(\varrho = R_i); & p_{iz} = -P_{ez}(\varrho = R_i) = 0 \\ p_{ae} = -P_{ee}(\varrho = R_a); & p_{az} = -P_{ez}(\varrho = R_a) = 0 \end{cases}$$

P_{ee} und P_{ez} ergeben sich aus v_e und v_z durch die Beziehung

$$(6) \quad \mathfrak{P} = -p\mathfrak{E} + 2\eta\mathfrak{B}.$$

Der hydrostatische Druck p ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$\text{grad } p = -\eta \text{ rot rot } \mathbf{v}$$

$$p = p_0 + \sum_n \frac{e^{nz}}{n} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n\varrho).$$

Zur Ableitung dieses Resultates ist zu bemerken, daß hierzu nur die Kenntnis des intermediären Integrals W_n der Differentialgleichung für F_n nötig war, nicht etwa F_n selbst. Das intermediäre Integral W_n hat hier also insofern eine physikalische Bedeutung, als es den hydrostatischen Druck liefert. Weiterhin stellen wir fest, daß die durch Überstreichung gekennzeichnete Zylinderfunktion in dem Ausdruck für p nicht vorkommt. — Berechnet man nun P_{ee} und P_{ez} nach Formel (6), so ergeben sich durch die Formeln (5) die Oberflächenbedingungen:

$$\begin{aligned}
 p_{i,c} &= p_0 + a\eta + c \frac{\eta}{2R_i^2} - \eta \sum e^{nz} \left\{ R_i \mathfrak{Z}_1^{(n)}(nR_i) - \frac{2}{n} \mathfrak{Z}_0^{(n)}(nR_i) \right. \\
 &\quad \left. + 2n \overline{\mathfrak{Z}_0^{(n)}}(nR_i) - \frac{2}{R_i} \overline{\mathfrak{Z}_1^{(n)}}(nR_i) \right\} \\
 p_{a,c} &= p_0 + a\eta + c \frac{\eta}{2R_a^2} - \eta \sum e^{nz} \left\{ R_a \mathfrak{Z}_1^{(n)}(nR_a) - \frac{2}{n} \mathfrak{Z}_0^{(n)}(nR_a) \right. \\
 &\quad \left. + 2n \overline{\mathfrak{Z}_0^{(n)}}(nR_a) - \frac{2}{R_a} \overline{\mathfrak{Z}_1^{(n)}}(nR_a) \right\} \\
 0 &= \eta \sum e^{nz} \left\{ 2n \overline{\mathfrak{Z}_1^{(n)}}(nR_i) - R_i \mathfrak{Z}_0^{(n)}(nR_i) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n} \mathfrak{Z}_1^{(n)}(nR_i) \right\} \\
 0 &= \eta \sum e^{nz} \left\{ 2n \overline{\mathfrak{Z}_1^{(n)}}(nR_a) - R_a \mathfrak{Z}_0^{(n)}(nR_a) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n} \mathfrak{Z}_1^{(n)}(nR_a) \right\}.
 \end{aligned}$$

Da diese Beziehungen identisch in z erfüllt sein müssen, so muß in jeder dieser Gleichungen der Faktor von e^{nz} verschwinden. Bezeichnet J eine Besselsche Funktion, N eine Neumannsche Funktion und setzt man

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Z}^{(n)} &= a_n J + b_n N \\
 \overline{\mathfrak{Z}^{(n)}} &= c_n J + d_n N,
 \end{aligned}$$

so erhält man hierdurch vier homogene lineare Gleichungen für a_n, b_n, c_n, d_n ; da diese nur dann lösbar sind, wenn die Determinante des Systems verschwindet, so kommt eine transzendente Gleichung für n hinzu.

Ersetzt man n durch $-n$, so geht die Determinante in sich über; man kann sich also bei Berechnung der Werte für n auf die positiven Werte beschränken; die zugehörigen negativen Werte sind dann auch Lösungen. Ist dann diese transzendente Gleichung gelöst, so kann man die Verhältnisse $a_n : b_n : c_n : d_n$ bestimmen; die Konstanten p_0, a und c bestimmen sich wie in § 4. Hiermit sind dann die Oberflächenbedingungen erfüllt.

Hinzu kommen nun die folgenden drei Randbedingungen. Es ist

$$v_z = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und beliebiges } \varrho.$$

An der Stelle $z = L$, wo L die halbe Länge des Glasrohres ist, sitzt die zähflüssige Glasmasse an an festem Glas; es ist also

$$\begin{aligned} v_z &= \text{constans für } z = L \text{ und beliebiges } \varrho \\ v_\varrho &= 0 \quad \text{für } z = L \text{ und beliebiges } \varrho. \end{aligned}$$

Die erste Randbedingung erfüllt man, indem man von der Lösung mit positivem n noch die mit negativem n subtrahiert; an der Erfüllung der Oberflächenbedingungen wird hierdurch nichts geändert; dann wird

$$\begin{aligned} v_\varrho &= -\frac{\varrho}{2} \frac{\bar{v}_z}{L} - \frac{2}{\eta \varrho} (p_{i\varrho} - p_{a\varrho}) \frac{R_i^2 R_a^2}{R_a^2 - R_i^2} \\ &\quad + 2 \sum \left\{ \bar{\mathfrak{B}}_1^{(n)}(n\varrho) - \frac{\varrho}{2n} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n\varrho) \right\} \mathfrak{Cof} \, n z \\ v_z &= z \frac{\bar{v}_z}{L} - 2 \sum \left\{ \bar{\mathfrak{B}}_0^{(n)}(n\varrho) - \frac{1}{n^2} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n\varrho) + \frac{\varrho}{2n} \mathfrak{B}_1^{(n)}(n\varrho) \right\} \mathfrak{Sin} \, n z \\ p &= -2\eta \frac{\bar{v}_z}{L} + \frac{R_a^2 p_{a\varrho} - R_i^2 p_{i\varrho}}{R_a^2 - R_i^2} + 2\eta \sum \frac{1}{n} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n\varrho) \mathfrak{Cof} \, n z. \end{aligned}$$

Für jedes n ist hierin noch eine Konstante verfügbar.

In dem speziellen Fall $R_i = 1$; $R_a = 1,5$ ergeben sich

$$n_1 = 0,8; \quad n_2 = 1,5; \quad n_3 = 2,95; \quad n_4 = 5 \text{ usw.}$$

In diesem Fall ergibt sich, wenn nur das Verschwinden von v_ϱ und $v_z - \bar{v}_z$ für $\varrho = 1,25$ gefordert wird, wenn Innen- und Außendruck einander gleich gesetzt werden, bei Benutzung der beiden ersten n

$$\begin{aligned} v_\varrho &= \frac{\bar{v}_z}{L} \left\{ -\frac{\varrho}{2} - 0,1045 \left[30 J_1(0,8\varrho) + N_1(0,8\varrho) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\varrho}{1,6} (37,75 J_0(0,8\varrho) + 14,71 N_0(0,8\varrho)) \right] \mathfrak{Cof} \, 0,8 z \right. \\ &\quad \left. + 0,1539 \left[-2,72 J_1(1,5\varrho) + N_1(1,5\varrho) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\varrho}{3} (1,45 J_0(1,5\varrho) + 3,22 N_0(1,5\varrho)) \right] \mathfrak{Cof} \, 1,5 z \right\}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß das für das erste n entstehende Glied bei der Approximation von v_ϱ über das zweite Glied überwiegt; durch diese v_ϱ wird die Ebene $z = L$ in bestimmter Weise verbogen. Hätte man bei der angenäherten Darstellung von v_ϱ nicht die beiden ersten n , sondern die beiden nächsten benutzt, so wäre die Ebene $z = L$ noch stärker verbogen worden; bei Benutzung noch höherer n -Werte wird die Ebene noch stärker verbogen wegen der Periodizität der Zylinderfunktionen. Der natürlichste

Weg ist also der, die beiden ersten n -Werte zu benutzen. Eine bessere Approximation erhält man, wenn man noch das Verschwinden der ersten Ableitungen von v_e und v_z an der benutzten mittleren Stelle in der Ebene $z = L$ fordert; in diesem Fall nimmt man zur Nulllösung noch die ersten vier Eigenlösungen hinzu.

Auf die exakte Erfüllung aller Randbedingungen durch den Separationsansatz (3) und auf den Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der entstehenden Reihe, der sich auch führen läßt, wollen wir hier nicht eingehen.

§ 7. Temperaturänderung in Richtung der Rohrachse

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, nämlich daß η eine lineare Funktion der z -Koordinate ist. Da sich hier die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten nicht ändern, so bleiben die Lösungen der Form nach dieselben wie in § 6. Da sich hier aber der hydrostatische Druck bestimmt aus der Gleichung (1, 3):

$$\text{grad } p = -\eta \text{ rot rot } \mathbf{v} + 2 \mathfrak{B} \text{ grad } \eta,$$

so erhält man hier andere Oberflächenbedingungen; die in den Komponenten der Geschwindigkeit nach verfügbaren Konstanten bestimmen sich also anders als in § 6. Es ergibt sich hier, wenn η_0 den Wert von η an der Stelle $z = 0$ angibt:

$$p_0 = \eta_0 \sum \frac{e^{zn}}{n} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n \varrho) + \frac{d\eta}{dz} \left\{ 2az + \sum e^{nz} \left[-2 \mathfrak{B}_0^{(n)}(n \varrho) - \frac{\varrho}{n} \mathfrak{B}_1^{(n)}(n \varrho) + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{z}{n} \right) \mathfrak{B}_0^{(n)}(n \varrho) \right] \right\}.$$

Die Erfüllung der Oberflächenbedingungen kann hier nicht wie in § 6 vorgenommen werden, da die Koordinate z außer im Exponenten von e hier auch noch linear auftritt. Man kommt nun zu ebenso einfachen Oberflächenbedingungen wie in § 6, wenn man sich auf den Fall beschränkt, daß $d\eta/dz$ eine kleine Größe ist. In diesem Fall approximieren wir die für η angenetzte lineare Funktion durch eine Exponentialfunktion; wir setzen also an

$$\eta = \alpha e^{\beta z},$$

wo β eine sehr kleine Größe ist. Aus den Gleichungen (5, 3) und (5, 4) ergeben sich für die durch die Formeln (6, 3) de-

finierten Funktionen F_n und H_n die beiden folgenden Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \varrho F_n^{IV} + 6F_n''' + F_n'' \left(\frac{3}{\varrho} + 2n^2 \varrho \right) + F_n' \left(-\frac{3}{\varrho^2} + 6n^2 \right) \\ \quad + \varrho n^4 F_n = n\beta^2 (n\varrho F_n + H_n'), \end{cases}$$

$$(2) \quad n H_n = -2F_n - \varrho F_n'.$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) gewinnt man die folgende Differentialgleichung:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho^3 F_n^{IV} + 6\varrho^2 F_n''' + F_n'' (3\varrho + 2n^2 \varrho^3 + \beta^2 \varrho^3) \\ \quad + F_n' (-3 + 6n^2 \varrho^2 + 3\beta^2 \varrho^2) + \varrho^3 (n^4 - n^2 \beta^2) F_n = 0 \dots \end{cases}$$

Es liegt nahe nachzusehen, ob das auf folgende Weise definierte W_n ein intermediäres Integral der Differentialgleichung (3) ist:

$$n W_n = \varrho (n + \beta) F_n'' + 3(n + \beta) F_n' + (n - \beta) n^2 \varrho F_n.$$

Unter der Annahme, daß β klein sei gegenüber der Hälfte des kleinsten Wertes von n , reduziert sich die Differentialgleichung (3) auf die folgende:

$$W_n'' + \frac{1}{\varrho} W_n' + W_n \left((n + \beta)^2 - \frac{1}{\varrho^2} \right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat natürlich die triviale Lösung

$$W_n^{(1)} = 0$$

und außerdem die allgemeine Lösung

$$W_n^{(2)} = \mathfrak{Z}_1^{(n)} ((n + \beta) \varrho).$$

Über die Bezeichnung gilt hier dasselbe wie das an der entsprechenden Stelle in § 6 Gesagte. In dem ersten Fall ist F_n eine Lösung der Differentialgleichung:

$$F_n'' + \frac{3}{\varrho} F_n' + n^2 \frac{n - \beta}{n + \beta} F_n = 0.$$

Die Lösung hiervon ist

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{\varrho} \mathfrak{Z}_1^{(n)} \left(n \sqrt{\frac{n - \beta}{n + \beta}} \varrho \right).$$

Dabei soll die Überstreichung wieder eine Zylinderfunktion mit anderen Konstanten als $\mathfrak{Z}_1^{(n)} ((n + \beta) \varrho)$ bedeuten. In dem zweiten Fall ist F_n eine Lösung der Differentialgleichung

$$F_n'' + \frac{3}{\varrho} F_n' + n^2 \frac{n - \beta}{n + \beta} F_n = \frac{n}{n + \beta} \frac{1}{\varrho} \mathfrak{Z}_1^{(n)} ((n + \beta) \varrho).$$

Diese Differentialgleichung lösen wir durch die folgende Entwicklung nach Zylinderfunktionen

$$F_n^{(2)} = - \frac{n}{2(n+\beta)^2} \mathfrak{B}_0^{(n)} ((n+\beta)\varrho) + \frac{2\beta}{n} \sum_{\nu=2}^{\infty} d_{2\nu} \mathfrak{B}_{2\nu}^{(n)} ((n+\beta)\varrho).$$

Also ist

$$v_\varrho = \varrho f(\varrho, z) = - \frac{a\varrho}{2} + \frac{c}{\varrho} + \sum e^{nz} \left\{ \mathfrak{B}_1^{(n)} \left(n \sqrt{\frac{n-\beta}{n+\beta}} \varrho \right) - \frac{\varrho n}{2(n+\beta)^2} \mathfrak{B}_0^{(n)} ((n+\beta)\varrho) + \frac{2\beta}{n} \varrho \sum_{\nu=2}^{\infty} d_{2\nu} \mathfrak{B}_{2\nu}^{(n)} ((n+\beta)\varrho) \right\}.$$

In dieser Lösung sind $4n+2$ Konstanten enthalten, die aus den Oberflächen- und Randbedingungen zu bestimmen sind.

Unter Benutzung von Formel (2) ergibt sich

$$v_z = h(\varrho, z) = az - \sum e^{nz} \left\{ \sqrt{\frac{n-\beta}{n+\beta}} \mathfrak{B}_0^{(n)} \left(n \sqrt{\frac{n-\beta}{n+\beta}} \varrho \right) - \frac{1}{(n+\beta)^2} \mathfrak{B}_0^{(n)} ((n+\beta)\varrho) + \frac{\varrho}{2(n+\beta)} \mathfrak{B}_1^{(n)} ((n+\beta)\varrho) + \frac{4\beta}{n^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} d_{2\nu} \mathfrak{B}_{2\nu}^{(n)} ((n+\beta)\varrho) + 2\varrho \frac{\beta}{n} \sum_{\nu=2}^{\infty} d_{2\nu} \left[- \frac{2\nu}{(n+\beta)\varrho} \mathfrak{B}_{2\nu}^{(n)} ((n+\beta)\varrho) + \mathfrak{B}_{2\nu-1}^{(n)} ((n+\beta)\varrho) \right] \right\}.$$

Hierin kommen dieselben Konstanten vor wie in v_ϱ , mit Ausnahme von c .

Aus Formel (1,3) und der Definition der Funktion W_n ergibt sich für den hydrostatischen Druck:

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = -\eta \sum e^{nz} W_n; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \sum \frac{e^{nz}}{n+\beta} \left(W_n' + \frac{1}{\varrho} W_n \right).$$

Diese beiden Beziehungen sind ebenso gebaut wie die entsprechenden Beziehungen in § 6.

Also ist

$$p = p_0 + \eta \sum \frac{e^{nz}}{n+\beta} \mathfrak{B}_0^{(n)} ((n+\beta)\varrho).$$

Auch hier stellen wir wie in § 6 fest, daß die durch Überstreichen gekennzeichnete Zylinderfunktion in dem Ausdruck für p nicht vorkommt.

Um die noch freien Konstanten zu bestimmen, haben wir nun die Oberflächen- und Randbedingungen zu erfüllen. Ein Unterschied gegenüber § 6 besteht darin, daß jetzt die Randbedingung

$$v_z = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und beliebiges } \varrho$$

nicht mehr zu erfüllen ist. In § 6 ließ sich diese Forderung für jede zu einem Eigenwert n gehörige Eigenlösung erfüllen, wenn man zu der Eigenlösung mit einem positiven n noch die mit dem negativen n hinzunahm; hier läßt sich auf dieselbe Weise die etwas abgeschwächte Forderung erfüllen, daß v_z in der Ebene $z = 0$ im Mittel verschwinden soll, also

$$\int_{R_i}^{R_a} \varrho v_z(z=0) d\varrho = 0.$$

Als nächstes betrachten wir die Oberflächenbedingungen, die sich aus den Formeln (6, 5) ergeben; die Konstanten p_0 , a und c bestimmen sich wie in § 6. Jetzt kommen aber in den auftretenden Summen [vgl. (6, 7)] zwei wesentlich verschiedene Glieder vor, von denen das eine mit e^{nz} und das andere mit e^{-nz} multipliziert ist. Man erhält also zwei homogene lineare Gleichungssysteme von je 4 Gleichungen für a_n , b_n , c_n , d_n und a_{-n} , b_{-n} , c_{-n} , d_{-n} . In § 6 war $a_n = a_{-n}$, $b_n = b_{-n}$, $c_n = c_{-n}$, $d_n = d_{-n}$; dies ist hier nicht mehr der Fall. Da die Determinante eines jeden der beiden Gleichungssysteme verschwinden muß, so ergeben sich zwei Folgen von Eigenwerten, von denen die eine die a_n , b_n , c_n , d_n bestimmt und die andere die a_{-n} , b_{-n} , c_{-n} , d_{-n} . — Die Erfüllung der Randbedingungen

$$v_z = \text{constans für } z = L \text{ und beliebiges } \varrho$$

$$v_\varrho = 0 \quad \text{für } z = L \text{ und beliebiges } \varrho$$

kann ähnlich wie in § 6 vorgenommen werden.

§ 8. Temperaturänderung senkrecht zur Rohrachse.

Der am einfachsten zu behandelnde Fall ist die durch eine Exponentialfunktion gegebene Viskositätsverteilung:

$$\eta = \alpha e^{\beta z}.$$

Hier ergibt sich aus den Gleichungen (5, 3) und (5, 4) für die durch (6, 3) definierte Funktion F_n :

$$\varrho^3 F_n^{(4)} + 6 \varrho^2 F_n^{(3)} + F_n'' (3 \varrho + 2 n^2 \varrho^3) + F_n' (-3 + 6 n^2 \varrho^2) + n^4 \varrho^3 F_n = -\beta (n^2 \varrho^2 F_n + 3 \varrho F_n' + \varrho^2 F_n''),$$

wobei vorausgesetzt ist, daß β klein ist gegenüber dem kleinsten Wert von n . Definiert man wie in § 6:

$$W_n = \varrho F_n'' + 3 F_n' + n^2 \varrho F_n,$$

so ergibt sich aus der Differentialgleichung für F_n wie in § 6 die folgende Differentialgleichung für W_n :

$$W_n'' + \frac{1}{\varrho} W_n' + W_n \left(n^2 + \frac{\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat natürlich die triviale Lösung:

$$W_n^{(1)} = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist durch die folgende konvergente Entwicklung darstellbar:

$$W_n^{(2)} = \mathfrak{B}_1^{(n)}(n \varrho) + \sum_{\nu=2}^{\infty} c_{\nu}^{(n)} \mathfrak{B}_{\nu}^{(n)}(n \varrho).$$

Dabei ergibt sich für die c :

$$c_{2\pi+2}^{(n)} = (-1)^{\pi+1} \frac{\beta}{n} 4 \frac{\pi+1}{(2\pi+1)(2\pi+3)} \quad \text{und} \quad c_{2\pi+1}^{(n)} = (-1)^{\pi-1} \cdot \left(\frac{\beta}{n} \right)^2 \frac{1}{3\pi} \frac{2\pi+1}{2\pi+2} \left\{ 1 + 4 \frac{4}{5} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{6}{7} \frac{3}{4} \left\{ 1 + \frac{8}{9} \frac{5}{6} \left\{ 1 + \dots \right. \right. \right. \right. \\ \cdot \left. \left\{ 1 + \frac{2\pi-2}{2\pi-1} \frac{2\pi-5}{2\pi-4} \left\{ 1 + \frac{2\pi}{2\pi+1} \frac{2\pi-3}{2\pi-2} \right\} \dots \right\} \right\} \right\}$$

Man erkennt durch eine einfache Überlegung leicht, daß $c_{2\pi+2}^{(n)}$ eine ungerade Funktion von β/n ist und $c_{2\pi+1}^{(n)}$ eine gerade Funktion, und zwar sind es Polynome. In dem ersten Fall ist F_n eine Lösung der Differentialgleichung:

$$F_n'' + \frac{3}{\varrho} F_n' + n^2 F_n = 0,$$

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{\varrho} \mathfrak{B}_1^{(n)}(n \varrho).$$

In dem zweiten Fall ist F_n eine Lösung der Differentialgleichung

$$F_n'' + \frac{3}{\varrho} F_n' + n^2 F_n = \frac{1}{\varrho} \mathfrak{B}_1^{(n)}(n \varrho) + \frac{1}{\varrho} \sum_{\nu=2}^{\infty} c_{\nu}^{(n)} \mathfrak{B}_{\nu}^{(n)}(n \varrho).$$

Diese Differentialgleichung lösen wir durch die folgende konvergente Entwicklung:

$$F_n^{(2)} = \sum_{v=0}^{\infty} d_v^{(n)} \mathfrak{B}_v^{(n)}(n \varrho).$$

Dabei ist $d_0^{(n)} = -\frac{1}{2n}$; $d_1^{(n)} = 0$; $d_2^{(n)} = 0$; die weiteren d ergeben sich aus der Rekursion:

$$\frac{n}{2} [d_{v+1}^{(n)}(v+3) + d_{v-1}^{(n)}(v-3)] = c_v^{(n)}.$$

Ändert man das Vorzeichen von n , so ändert sich das Vorzeichen von $d_{2\mu+2}$, aber nicht das von $d_{2\mu+3}$. Es ist dann:

$$v_e = \varrho f(\varrho, z) = -a \frac{\varrho}{2} + \frac{z}{\varrho} + \sum e^{nz} \left\{ \overline{\mathfrak{B}_1^{(n)}}(n \varrho) - \frac{\varrho}{2n} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n \varrho) + \varrho \sum_{v=3}^{\infty} d_v^{(n)} \mathfrak{B}_v^{(n)}(n \varrho) \right\}.$$

Zu bemerken ist, daß alle $d_v^{(n)}$ den Faktor β/n haben, also für $\beta = 0$ verschwinden. Ändert man das Vorzeichen von n , so ändert sich das Vorzeichen der geschweiften Klammer. In dieser Lösung sind $4n + 2$ Konstanten enthalten, die sich aus den Oberflächen- und Randbedingungen bestimmen.

Unter Benutzung von Gleichung (6, 4) ergibt sich durch einfache Rechnung:

$$v_s = az - \sum e^{nz} \left\{ -\overline{\mathfrak{B}_0^{(n)}}(n \varrho) - \frac{1}{n^2} \mathfrak{B}_0^{(n)}(n \varrho) + \frac{\varrho}{2n} \mathfrak{B}_1^{(n)}(n \varrho) + \frac{2}{n} \sum_{v=3}^{\infty} d_v^{(n)} \mathfrak{B}_v^{(n)}(n \varrho) + \varrho \sum_{v=3}^{\infty} d_v^{(n)} \left(-\frac{v}{n \varrho} \mathfrak{B}_v^{(n)}(n \varrho) + \mathfrak{B}_{v-1}^{(n)}(n \varrho) \right) \right\}.$$

Für den hydrostatischen Druck ergibt sich aus Gleichung (1, 3):

$$p = p_0 + \eta \sum \frac{e^{nz}}{n} \left\{ \mathfrak{B}_0^{(n)}(n \varrho) - 2 \frac{\beta}{n} \mathfrak{B}_1^{(n)}(n \varrho) + \sum_{v=2}^{\infty} \mathfrak{B}_v^{(n)}(n \varrho) \left[\frac{c_{v-1}^{(n)}}{2} \left(\frac{1}{v-1} - 1 \right) + \frac{c_{v+1}^{(n)}}{2} \left(\frac{1}{v+1} + 1 \right) - \frac{\beta}{n} c_v^{(n)} \right] \right. \\ \left. + \frac{d \eta}{d \varrho} \sum e^{nz} \left\{ 2n \overline{\mathfrak{B}_1^{(n)}}(n \varrho) - \varrho \mathfrak{B}_0^{(n)}(n \varrho) + 2n \varrho \sum_{v=3}^{\infty} d_v^{(n)} \mathfrak{B}_v^{(n)}(n \varrho) \right\} \right\}.$$

Ändert man hier das Vorzeichen von n , so ändert die erste Summe ihr Vorzeichen, die zweite aber nicht.

Was die Erfüllung der Randbedingungen angeht, so ist zu bemerken, daß die Erfüllung der Randbedingung

$$v_z = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und beliebiges } \varrho$$

hier zwar exakt möglich ist.

Da dann aber eine Erfüllung der Oberflächenbedingungen unmöglich ist, so ist das Verfahren von § 7 einzuschlagen.

2. Abschnitt: Das Blasen einer Glaskugel

§ 9. Spezieller Fall: Die gleichmäßig erwärmte Kugel

Wir betrachten hier eine Kugel, deren Mittelpunkt der Nullpunkt des Koordinatensystems ist, und zwar eines Polarkoordinatensystems r, ϑ, φ , wobei ϑ die Poldistanz ist und φ das Azimut. Wir machen den speziellen Ansatz:

$$v_r = f(r); \quad v_\vartheta = v_\varphi = 0.$$

Wegen der Inkompressibilität ist:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

oder:

$$(1) \quad r f' + 2f = 0.$$

Die Lösung der Differentialgleichung für die Funktion f ist:

$$f = \frac{c}{r^2},$$

wo c eine vorläufig noch willkürliche Konstante bedeutet. Also ist:

$$\mathbf{v} = c \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -c \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

Mit dieser Lösung haben wir die Bewegungsgleichung (1, 3) zu erfüllen, die sich hier reduziert auf

$$\operatorname{grad} p = -\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Es ist $\operatorname{grad} p = 0$, d. h. p ist eine Konstante.

Die noch freien Konstanten c und p bestimmen sich aus den Oberflächenbedingungen. Wir nehmen an, daß sich innerhalb der Kugel, die den inneren Radius R_i und den äußeren Radius R_a haben möge, der Druck p_i und außerhalb der Druck p_a befindet; dann ist:

$$p_i = -P_{rr}(r = R_i),$$

$$p_a = -P_{rr}(r = R_a).$$

Es ergibt sich dann unter Benutzung der Beziehung

$$\mathfrak{P} = -p \mathfrak{E} + 2\eta \mathfrak{B}.$$

$$\mathfrak{v} = -\frac{p_i - p_a}{4\eta} \frac{R_i^3 R_a^3}{R_a^3 - R_i^3} \text{grad } \frac{1}{r}.$$

§ 10. Allgemeiner Fall: Die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten

Die Differentialgleichung für \mathfrak{v} lautet nach (5, 2):

$$(1) \quad \eta \text{ rotrot } \mathfrak{v} = [\text{rotrot } \mathfrak{v} \text{ grad } \eta] + 2 \text{ rot } \mathfrak{B} \text{ grad } \eta.$$

Für den speziellen Fall des Blasens einer Glaskugel machen wir nun den folgenden *allgemeinen Ansatz*:

$$v_r = f(r, \vartheta),$$

$$v_\vartheta = h(r, \vartheta),$$

$$v_\varphi = 0.$$

Wir bilden zuerst $\text{rotrot } \mathfrak{v}$; wir rechnen wieder in physikalischen Komponenten; es ist¹⁾

$$\overline{\text{rotrot}_i \mathfrak{v}} = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\sqrt{g} \frac{\frac{\partial}{\partial x^\kappa} (\bar{v}_i e_\kappa) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{v}_\kappa e_i)}{e_i^4 e_\kappa^3} \right).$$

In unserem Fall ist²⁾

$$x^1 = r \quad x^2 = \varphi \quad x^3 = \vartheta,$$

$$e_1 = 1 \quad e_2 = r \sin \vartheta \quad e_3 = r,$$

$$\bar{v}^1 = v_r \quad \bar{v}^2 = v_\varphi \quad \bar{v}^3 = v_\vartheta.$$

Nun bilden wir die Komponenten von $\text{rotrot } \mathfrak{v}$; allgemein ist:²⁾

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

2) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 155, 2. Aufl. S. 182.

$$\operatorname{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\varphi) \right),$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r a_\vartheta)}{\partial r} \right),$$

$$\operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right).$$

Dann ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot}_r \mathbf{v} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{v} = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot}_\varphi \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} & \left\{ \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} - r \frac{\partial^2 \vartheta_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} \right. \\ & + \cotg \vartheta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} - r \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta^2} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \\ & - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right) \Big\} \\ & - \left\{ r \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2 \partial \vartheta} \right\}. \end{aligned}$$

Nun bilden wir die Komponenten von \mathfrak{B} grad η in Polarkoordinaten. Wir nehmen nun an, daß η nur Funktion von ϑ ist, was ja auch praktisch am meisten in Frage kommt bei dem Blasen einer Kugel an einem festen Ansatzstück. Dann ist, wenn $\eta' = \frac{d\eta}{d\vartheta}$ gesetzt wird¹⁾,

$$\mathfrak{B}_r \operatorname{grad} \eta = \frac{1}{r} V_{r\vartheta} \eta'; \quad \mathfrak{B}_\varphi \operatorname{grad} \eta = \frac{1}{r} V_{\varphi\vartheta} \eta';$$

$$\mathfrak{B}_\vartheta \operatorname{grad} \eta = \frac{1}{r} V_{\vartheta\vartheta} \eta'.$$

Für die physikalischen Komponenten des Tensors \mathfrak{B} erhält man aus²⁾

$$\begin{aligned} \overline{V_{i\kappa}} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e_i}{e_\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\bar{v}_i}{e_i} \right) + \frac{e_\kappa}{e_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\bar{v}_\kappa}{e_\kappa} \right) \right\} \\ &+ \frac{(i\kappa)}{e_\kappa} \sum_{s=1}^3 \frac{\bar{v}_s}{e_s} \frac{\partial e_\kappa}{\partial x^s}, \quad \text{wo } (i\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = \kappa \\ 0 & \text{für } i \neq \kappa \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}_r \mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta = 0,$$

$$\operatorname{rot}_\vartheta \mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta = 0,$$

$$\begin{aligned} r \operatorname{rot}_\varphi \mathfrak{B} \operatorname{grad} \eta &= \frac{\eta''}{2r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right) \\ &+ \frac{\eta'}{2r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta} - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r} v_r \right). \end{aligned}$$

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 151, 2. Aufl. S. 177.

2) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

Für die physikalischen Komponenten von [rotrot \mathfrak{v} grad η] erhält man:

$$\begin{aligned} [\text{rotrot } \mathfrak{v} \text{ grad } \eta]_r &= 0 & [\text{rotrot } \mathfrak{v} \text{ grad } \eta]_\phi &= 0, \\ [\text{rotrot } \mathfrak{v} \text{ grad } \eta]_\phi &= \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{r^3} \cdot \eta' \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} - r \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial v_\phi}{\partial \vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \cotg \vartheta \left(\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - v_\phi \right) \right). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in die Ausgangsgleichung (1) erhält man die folgende partielle Differentialgleichung für die Funktionen f und h :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\eta \{ f_{\phi\phi\phi} - r h_{r\phi\phi} - h_{\phi\phi} + \cotg \vartheta (f_{\phi\phi} - r h_{r\phi} - h_\phi) \\ &\quad - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} (f_\phi - r h_r - h) - r^3 h_{rrr} - 3 r^2 h_{rr} + r^2 f_{rr\phi} \} \\ &= \eta'' (f_\phi + r h_r - h) + \eta' \{ f_{\phi\phi} - r h_{r\phi} - 2 r f_r + h_\phi + 2 f \\ &\quad + (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) [f_{\phi\phi} - r h_{r\phi} - h_\phi \\ &\quad \quad + \cotg \vartheta (f_\phi - r h_r - h)] \}. \end{aligned} \right.$$

Nimmt man hierzu noch die Inkompressibilitätsbedingung $\text{div } \mathfrak{v} = 0$, so hat man als zweite Gleichung für f und h ¹⁾

$$(3) \quad r f_r + 2 f + h_\phi + h \cotg \vartheta = 0.$$

11. Allgemeiner Fall: Die gleichmäßig erwärmte Glaskugel

Hier ist η eine Konstante. Es vereinfacht sich dann Gleichung (10, 2) zu:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} &(f_{\phi\phi\phi} - r h_{r\phi\phi} - h_{\phi\phi} + \cotg \vartheta (f_{\phi\phi} - r h_{r\phi} - h_\phi) \\ &\quad - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} (f_\phi - r h_r - h) + r^2 f_{rr\phi} - r^3 h_{rrr} \\ &\quad \quad \quad - 3 r^2 h_{rr} = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung (10, 3) bleibt:

$$(2) \quad r f_r + 2 f + h_\phi + h \cotg \vartheta = 0.$$

Gleichung (1) läßt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3}{\partial \vartheta^3} (f_\phi - r h_r - h) + \cotg \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (f_\phi - r h_r - h) \\ &\quad - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} (f_\phi - r h_r - h) + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (f_\phi - r h_r - h) = 0. \end{aligned}$$

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 155, 2. Aufl. S. 182.

Die Trennung der Variablen wird erreicht durch den Ansatz

$$f(r, \vartheta) = \sum r^n F_n(\vartheta); \quad h(r, \vartheta) = \sum r^n H_n(\vartheta).$$

Dann wird aus der letzten Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} (F_n' - (n+1)H_n) + \cotg \vartheta \frac{d}{d\vartheta} (F_n' - (n+1)H_n) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} (F_n' - (n+1)H_n) + n(n-1)(F_n' - (n+1)H_n) = 0.$$

Wir setzen nun

$$W_n = F_n' - (n+1)H_n.$$

Dann ist:

$$W_n'' + \cotg \vartheta W_n' + W_n \left(n(n-1) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat natürlich die triviale Lösung

$$W_n^{(1)} = 0$$

und die nicht triviale Lösung¹⁾

$$W_n^{(2)} = c_{n-2} \sin \vartheta \frac{d P_{n-1}(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)},$$

wo P_{n-1} eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung ist, die später noch näher charakterisiert wird, oder:

$$W_n^{(2)} = -c_{n-2} \frac{d P_{n-1}}{d \vartheta}.$$

Nun ergibt sich aber aus Gleichung (2):

$$(3) \quad F_n = -\frac{1}{n+2} (H_n' + H_n \cotg \vartheta).$$

Hierbei ist $n \neq -2$ vorausgesetzt; dieser Fall ist also in der folgenden Rechnung nicht enthalten; er ist bereits in § 9 erledigt. Es ist dann:

$$W_n = -\frac{1}{n+2} \left\{ H_n'' + H_n' \cotg \vartheta + H_n \left((n+1)(n+2) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) \right\}.$$

In dem Fall $W_n^{(1)} = 0$ folgt hieraus¹⁾:

$$H_n^{(1)} = -d_n \frac{d P_{n+1}}{d \vartheta}.$$

In dem Fall $W_n^{(2)}$ ergibt sich als Differentialgleichung für $H_n^{(2)}$:

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 34, 2. Aufl. S. 61.

$$H_n'' + H_n' \cotg \vartheta + H_n \left((n+1)(n+2) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) = (n+2) c_{n-2} \frac{d P_{n-1}}{d \vartheta}.$$

Sie wird gelöst durch

$$H_n^{(2)} = c_{n-2} \frac{n+2}{4n+2} \frac{d P_{n-1}}{d \vartheta}.$$

Also ist

$$v_\varphi = h(r, \vartheta) = \sum r^n \left\{ -d_n \frac{d P_{n+1}}{d \vartheta} + \frac{n+2}{4n+2} c_{n-2} \frac{d P_{n-1}}{d \vartheta} \right\}.$$

Die hierin auftretenden Konstanten c und d sowie die Zahl n sind aus den Oberflächen- und Randbedingungen zu bestimmen.

Unter Benutzung des Zusammenhanges (3) von F_n mit H_n ergibt sich:

$$v_r = f(r, \vartheta) = \frac{c}{r^2} - \sum \frac{r^n}{n+2} \left\{ (n+1)(n+2) d_n P_{n+1} - \frac{(n-1)n(n+2)}{4n+2} c_{n-2} P_{n-1} \right\}.$$

Hierin kommen dieselben Konstanten vor wie in v_φ bis auf die Konstante c .

Um die Oberflächenbedingungen erfüllen zu können, ist die Kenntnis des hydrostatischen Druckes nötig. Er ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (5, 1)

$$\text{grad } p = -\eta \text{ rot rot } \mathbf{v},$$

$$p = p_0 - \eta \sum r^{n-1} c_{n-2} n P_{n-1}.$$

Um die Konstanten zu bestimmen, betrachten wir zuerst die Oberflächenbedingungen. Ist R_i der innere und R_a der äußere Radius der Kugel, p_i der auf die Innenwand wirkende Druck und p_a der auf die Außenwand wirkende, so ist:

$$p_{ir} = -P_{rr}(r = R_i) \quad p_{i\vartheta} = -P_{r\vartheta}(r = R_i) = 0,$$

$$p_{ar} = -P_{rr}(r = R_a) \quad p_{a\vartheta} = -P_{r\vartheta}(r = R_a) = 0.$$

P_{rr} und $P_{r\vartheta}$ ergeben sich aus v_r und v_φ durch die Beziehung:

$$\mathfrak{P} = -p \mathfrak{E} + 2\eta \mathfrak{B}.$$

Man erhält dann die Oberflächenbedingungen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{ir} &= p_0 + 4\eta \frac{c}{R_i^3} - \eta \sum_n n R_i^{n-1} \\ &\quad \cdot \left\{ c_{n-2} P_{n-1} + (n+1) d_n P_{n+1} - \frac{n(n-1)}{4n+2} c_{n-2} P_{n-1} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(4') \left\{ \begin{aligned} p_{ar} &= p_0 + 4\eta \frac{c}{R_a^3} - \eta \sum_n n R_a^{n-1} \\ &\cdot \left\{ c_{n-2} P_{n-1} + (n+1) d_n P_{n+1} - \frac{n(n-1)}{4n+2} c_{n-2} P_{n-1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(4'') \left\{ \begin{aligned} 0 &= \eta \sum_n R_i^n \\ &\cdot \left\{ -2 d_n n \frac{d P_{n+1}}{d \vartheta} + c_{n-2} \frac{2n^3 + n + 1}{4n+2} \frac{d P_{n-1}}{d \vartheta} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(4''') \left\{ \begin{aligned} 0 &= \eta \sum_n R_a^n \\ &\cdot \left\{ -2 d_n n \frac{d P_{n+1}}{d \vartheta} + c_{n-2} \frac{2n^3 + n + 1}{2n+2} \frac{d P_{n-1}}{d \vartheta} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Durch Zusammenziehung in den Summen erhält man als Oberflächenbedingungen:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} p_{ir} &= p_0 + 4\eta \frac{c}{R_i^3} - \eta \sum_n P_{n+1} \\ &\cdot \left\{ n(n+1) d_n R_i^{n+1} + (n+2) R_i^{n+1} c_n \frac{3n^3 + 15n + 18}{4n+10} \right. \\ &\quad \left. + (n+2)(n+3) d_{-n} R_i^{-n-4} - (n+1) R_i^{-n-2} c_{-n} \frac{5n^2 + 9n + 4}{4n+2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(5') \left\{ \begin{aligned} p_{ar} &= p_0 + 4\eta \frac{c}{R_a^3} - \eta \sum_n P_{n+1} \\ &\cdot \left\{ n(n+1) d_n R_a^{n+1} + (n+2) R_a^{n+1} c_n \frac{3n^3 + 15n + 18}{4n+10} \right. \\ &\quad \left. + (n+2)(n+3) d_{-n} R_a^{-n-4} - (n+1) R_a^{-n-2} c_{-n} \frac{5n^2 + 9n + 4}{4n+2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(5'') \left\{ \begin{aligned} 0 &= -\eta \sum_n \frac{d P_{n+1}}{d \vartheta} \left\{ -2n R_i^n d_n + c_n R_i^{n+2} \frac{2n^2 + 9n + 11}{4n+2} \right. \\ &\quad \left. + 2(n+3) R_i^{-n-3} d_{-n} - c_{-n} R_i^{-n-1} \frac{2n^2 + 3n + 2}{4n+10} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(5''') \left\{ \begin{aligned} 0 &= -\eta \sum_n \frac{d P_{n+1}}{d \vartheta} \left\{ -2n R_a^n d_n + c_n R_a^{n+2} \frac{2n^2 + 9n + 11}{4n+2} \right. \\ &\quad \left. + 2(n+3) R_a^{-n-3} d_{-n} - c_{-n} R_a^{-n-1} \frac{2n^2 + 3n + 2}{4n+10} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Zu diesen Oberflächenbedingungen kommt noch eine Randbedingung. Wir nehmen an, die Kugel werde an einem festen kreisförmigen Ansatzstück geblasen, das in Richtung der Achse des Polarkoordinatensystems ansitzt. Die Stelle $\vartheta = 0$ liege auf der dem Ansatzstück gegenüberliegenden Seite der Kugel. Es sei ϑ_0 die Poldistanz der Stelle, wo die Kugel ansitzt. Dann hat man als Randbedingung

$$v_r = 0 \text{ für } \vartheta = \vartheta_0 \text{ identisch in } r.$$

Führt man die für die Umformung der Oberflächenbedingungen gemachten Überlegungen auch durch für v_r , so erhält man:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} v_r &= \frac{c}{r^2} - \sum_n P_{n+1} \left\{ r^n (n+1) d_n \right. \\ &\quad \left. - r^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{4n+10} c_n - r^{n+3} (n+2) d_n + r^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{4n+2} c_n \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist als Funktion P_{n+1} eine solche Lösung der Differentialgleichung zu nehmen, die für $\vartheta = 0$ regulär ist; bei $\vartheta = \pi$ braucht sie es nicht mehr zu sein. Setzt man $\cos \vartheta = \mu$, so wird wegen

$$P_n(\mu) = F\left(n+1; -n; 1; \frac{1-\mu}{2}\right),$$

wo F die hypergeometrische Funktion bedeutet, die Funktion $P_n(\mu)$ durch die folgende Reihe geliefert:

$$P_n(\mu) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{n}{\nu} \binom{-n-1}{\nu} \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{\nu}.$$

Um nun die Randbedingung $v_r = 0$ zu befriedigen, ist $c = 0$ zu setzen und n so zu wählen, daß

$$(6') \quad P_{n+1}(\cos \vartheta_0) = 0$$

ist. Diese transzendente Gleichung für n wird gelöst durch unendlich viele Werte n ; die Lösungen sind z. B. graphisch zu finden in dem Bild der Kurven $P_n(x) = 0$.¹⁾ Es ergeben sich

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 31, 2. Aufl. S. 157.

für $\vartheta_0 = 135^\circ$, d. h. $\cos \vartheta_0 = -0,7$ die Werte

$n + 1 = 0,6; 1,8; 3,2; 4,5; 5,8; 7,2; 8,4; 9,9; 11,2$ usw.,

für $\vartheta = 90^\circ$, d. h. $\cos \vartheta = 0$ die Werte

$n + 1 = 1; 3; 5; 7$ usw., also die ungeraden ganzen Zahlen,

für $\vartheta = 45^\circ$, d. h. $\cos \vartheta_0 = 0,7$ die Werte

$n + 1 = 2,5; 6,5; 10,7$ usw.

Die noch freien Konstanten d_n, c_n, d_{-n}, c_{-n} sind aus dem Gleichungssystem (5) so zu bestimmen, daß die rechten Seiten die Entwicklungen der linken Seiten nach Kugelfunktionen der eben bestimmten Ordnungen sind, die übrigens ein orthogonales Funktionensystem bilden, da sie nach (6') alle eine gemeinsame Nullstelle haben und einer sich selbst adjungierten Differentialgleichung genügen.

Es ergibt sich für die d_n, c_n, d_{-n}, c_{-n} ein lineares inhomogenes Gleichungssystem mit von Null verschiedener Determinante. Es läßt sich dann zeigen, daß die Reihen für v_r und v_ϑ konvergieren.

§ 12. Die dünne, gleichmäßig erwärmte Kugel mit zonenweise verschiedener Dicke

Wir betrachten von jetzt an nur dünne Kugeln; für sie wird die Theorie von § 3 in Anwendung gebracht. Wird die wirkende Kraft als konstante Normalkraft angenommen, so lauten hier die Bewegungsgleichungen (3, 2), da eine Abhängigkeit vom Azimut φ hier nicht in Frage kommt,

$$k_r = D \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} - D \operatorname{div}_r \mathfrak{P},$$

$$0 = \frac{\partial P_{r\vartheta}}{\partial r} - \operatorname{div}_\vartheta \mathfrak{P}.$$

Setzt man $v_r = f(r, \vartheta)$ und $v_\vartheta = h(r, \vartheta)$, so ist nach (3, 1):

$$f_r = \frac{\dot{D}}{D} \quad \text{und} \quad h_r = 0.$$

Unter Benutzung der Beziehung

$$\mathfrak{P} = 2 \eta \mathfrak{B}$$

erhält man als erste Bewegungsgleichung, wenn man zunächst noch η als Funktion von ϑ annimmt¹⁾,

$$-\frac{k_r}{D} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial (r^2 \sin \vartheta)}{\partial r} 2 \eta f_r + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(r \sin \vartheta \eta \left(\frac{1}{r} f_\vartheta - \frac{h}{r} \right) \right) \right\} \\ - \frac{2 \eta}{r^2 \sin \vartheta} (f \sin \vartheta + h \cos \vartheta) - \frac{2 \eta}{r^2} (h_\vartheta + f).$$

Da die Dicke infinitesimal klein ist, kann nach Ausführung der angedeuteten Differentiationen $r = R$ gesetzt werden, wo R ein konstanter mittlerer Wert von r ist. Da dann die Funktionen f und h nur noch als Funktionen von ϑ auftreten, so können die Differentiationen einfach durch oben beigefügte Striche angedeutet werden. Die *erste Bewegungsgleichung* bekommt dann die Form:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{k_r}{D} &= \frac{\eta}{R^2} \left(f'' + f' \cotg \vartheta - 4f - 3h \cotg \vartheta - 3h' + 4R \frac{D}{D} \right) \\ &\quad + \frac{\eta'}{R^2} (f' - h). \end{aligned} \right.$$

Als *zweite Bewegungsgleichung* erhält man²⁾:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \eta (2 h'' + 2 h' \cotg \vartheta - 3 h - 2 h \cotg^2 \vartheta + 5 f') \\ &\quad + 2 \eta' (h' + f). \end{aligned} \right.$$

Als *dritte Gleichung* zwischen den Funktionen f, h und \dot{D}/D ergibt hier die Inkompressibilitätsbedingung:

$$(3) \quad 0 = R \frac{\dot{D}}{D} + 2f + h' + h \cotg \vartheta.$$

Wir betrachten jetzt den Fall *gleichmäßiger Erwärmung*, d. h. $\eta = \text{const.}$ Aus Gleichung (1) läßt sich dann die Funktion h mit Hilfe von Gleichung (3) eliminieren; sie lautet dann:

$$(4) \quad f'' + f' \cotg \vartheta + 2f = -\frac{R^2 k_r}{D \eta} - 7 R \frac{\dot{D}}{D}.$$

Die Dicke D ist als Funktion von ϑ gegeben. Ist $P_r(\cos \vartheta)$ das Legendresche Polynom r -ter Ordnung, so setzen wir:

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

2) E. Madelung, Math. Hilfsmittel, 1. Aufl. S. 152, 2. Aufl. S. 179.

$$\frac{1}{D\eta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}(\cos \vartheta).$$

Dabei berechnen sich die a_{ν} aus:

$$a_{\nu} = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{\nu}(\cos \vartheta)}{D\eta} d(\cos \vartheta).$$

Für \dot{D}/D machen wir als Ansatz die folgende Entwicklung nach Legendreschen Polynomen:

$$\frac{\dot{D}}{D} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} P_{\nu}(\cos \vartheta),$$

wobei die b_{ν} noch später zu bestimmen sind.

Demnach ergibt sich

$$v_r = f = -\frac{R^2 k_r a_0 + 7 R b_0}{2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{R^2 k_r a_{\nu} + 7 R b_{\nu}}{\nu(\nu+1)-2} P_{\nu}(\cos \vartheta) + c \cdot \cos \vartheta,$$

da die auf der ganzen Kugel reguläre Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung $c \cdot \cos \vartheta$ ist.

Für die Funktion h erhält man aus Gleichung (2) unter Benutzung der Gleichung (3):

$$h = f' - 2 R \frac{d}{d\vartheta} \frac{\dot{D}}{D},$$

d. h.

$$v_{\vartheta} = h = 2 R b_1 \sin \vartheta$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{R^2 k_r a_{\nu} + 7 R b_{\nu}}{\nu(\nu+1)-2} - 2 R b_{\nu} \right) \frac{d P_{\nu}(\cos \vartheta)}{d \vartheta} - c \cdot \sin \vartheta.$$

Mit diesen beiden Funktionen f und h und dem Ansatz für $\frac{\dot{D}}{D}$ ist nun der Gleichung (3) zu genügen. Sie liefert

$$-6 R b_0 - R^2 k_r a_0 = 0, \quad \text{d. h.} \quad b_0 = -\frac{R k_r}{6} a_0.$$

Ferner liefert sie $b_1 = 0$ und wegen $b_1 = -\frac{R k_r}{r} a_1$ auch $a_1 = 0$. Weiterhin ist

$$b_\nu = \frac{R k_r a_\nu}{2\nu(\nu+1)-6}.$$

Die Konstante c wird bestimmt durch die Randbedingung

$$v_r = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = \vartheta_0.$$

Für sie ergibt sich

$$c = -\frac{R^2 k_r}{2 \cos \vartheta_0} \left(\frac{a_0}{6} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{2\nu(\nu+1)+1}{[\nu(\nu+1)-2][\nu(\nu+1)-3]} a_\nu P_\nu(\cos \vartheta_0) \right).$$

Hätte man nun nicht für $1/D\eta$, sondern für $1/D$ eine Entwicklung nach Legendreschen Polynomen angesetzt, so hätte man gesehen, daß die Geschwindigkeitsverteilung und die relative Dickenänderung durch das Verhältnis k_r/η bestimmt werden.

In unserer Lösung steckt als interessanter Spezialfall der, daß die Dicke D eine Konstante ist. Dann ist

$$a_0 = \frac{1}{D\eta} \quad \text{und} \quad a_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geq 1,$$

dann ist

$$v_r = \frac{R^2 k_r}{12 D \eta} \left(1 - \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_0} \right); \quad v_\vartheta = -\frac{R^2 k_r}{12 D \eta} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta_0};$$

$$\frac{\dot{D}}{D} = -\frac{R^2 k_r}{6 D \eta}.$$

Diese letztere Lösung steht übrigens auch in einfachem Zusammenhang mit der Lösung von § 9. Denn hier ist, wenn $c = 0$ gesetzt wird:

$$v_r = -\frac{R}{2} \frac{\dot{D}}{D} \quad \text{oder} \quad 2v_r = -R \frac{dv_r}{dr}$$

und Gleichung (9, 1) besagt

$$2v_r = -r \frac{dv_r}{dr}.$$

§ 13. Die dünne ungleichmäßig erwärmte Kugel mit zonenweise verschiedener Dicke

Wir gehen aus von den Bewegungsgleichungen (12, 1), (12, 2), (12, 3). Aus den Gleichungen (12, 1) und (12, 2) wird unter Benutzung von (12, 3):

$$(1) \quad f'' + f' \cotg \vartheta + 2f + 7R \frac{\dot{D}}{D} + \frac{\eta'}{\eta} (f' - h) = - \frac{R^2 k}{D \eta}.$$

$$(2) \quad f' - h + \frac{2\eta'}{\eta} (h' + f) = \frac{d}{d\vartheta} \frac{\dot{D}}{D} \cdot 2R.$$

Hierbei ist k_r einfach durch k ersetzt. Wir suchen nun eine Differentialgleichung für die Funktion f , in der die Funktion h nicht mehr vorkommt. Entfernt man aus (2) die noch darin vorkommende Funktion h' mit Hilfe von Gleichung (12, 3), so folgt

$$(3) \quad h \left(1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta \right) = f' - 2 \frac{\eta'}{\eta} f - 2R \frac{d}{d\vartheta} \frac{\dot{D}}{D} - 2 \frac{\eta'}{\eta} R \frac{\dot{D}}{D}.$$

Aus (1) folgt

$$(4) \quad h \frac{\eta'}{\eta} = f'' + f' \cotg \vartheta + 2f + 7R \frac{\dot{D}}{D} + \frac{\eta'}{\eta} f' + \frac{R^2 k}{D \eta}.$$

Multipliziert man Gleichung (3) mit η'/η und Gleichung (4) mit $\left(1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta \right)$ und subtrahiert (3) von (4), so findet man

$$\begin{aligned} f'' \left(1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta \right) + f' \left\{ \left(\cotg \vartheta + \frac{\eta'}{\eta} \right) \left(1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta \right) - \frac{\eta'}{\eta} \right\} \\ + 2f \left\{ 1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta + \left(\frac{\eta'}{\eta} \right)^2 \right\} + \frac{R \dot{D}}{D} \left\{ 7 \left(1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta \right) \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\eta'}{\eta} \right)^2 \right\} + \frac{R^2 k}{D \eta} \left(1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta \right) + 2R \frac{\eta'}{\eta} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\dot{D}}{D} = 0. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß η'/η klein ist, wird hieraus

$$\begin{aligned} f'' + f' \cotg \vartheta + 2f + 7R \frac{\dot{D}}{D} + \frac{R^2 k}{D \eta} \\ + \frac{\eta'}{\eta} \frac{2R}{1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\dot{D}}{D} = 0. \end{aligned}$$

Es ist also zur Lösung von Gleichung (12, 4) noch die der folgenden Differentialgleichung hinzuzuzusaddieren:

$$f'' + f' \cotg \vartheta + 2f + \frac{\eta'}{\eta} \frac{2R}{1 + 2 \frac{\eta'}{\eta} \cotg \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\dot{D}}{D} = 0.$$

Wir führen nun die neue unabhängige Veränderliche $\mu = \cos \vartheta$ ein und bezeichnen die Ableitungen nach μ wieder durch oben beigefügte Striche; dann wird aus der Differentialgleichung

$$f''(1 - \mu^2) - 2\mu f' + 2f + 2R \frac{\eta'}{\eta} (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \frac{\dot{D}}{D} = 0.$$

Für D/\dot{D} setzen wir wie in § 12 die folgende Entwicklung nach Legendreschen Polynomen an

$$\frac{\dot{D}}{D} = b_0 + \sum_{\nu=2}^{\infty} b_{\nu} P(\cos \vartheta).$$

Wir betrachten nun den für die mathematische Behandlung einfachsten Fall, daß die *logarithmische Ableitung der Viskosität eine Konstante* ist, d. h.

$$\eta = \eta_0 e^{\omega \cos \vartheta}.$$

Unter Hinzunahme der Lösung von Gleichung (12, 4) ergibt sich dann als Darstellung der Funktion f :

$$\begin{aligned} f = & -\frac{R^2 k a_0 + 7 R b_0}{2} + P_2 \left(\frac{R^2 k a_2}{4} + \frac{6}{7} R \omega b_2 \right) \\ & + P_3 \left(\frac{R^2 k a_3 + 7 R b_3}{10} + \frac{4}{9} R \omega b_4 \right) + \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{P_{\nu}}{\nu(\nu+1)-2} \\ & \cdot \left\{ R^2 k a_{\nu} + 7 R b_{\nu} + 2 R \omega b_{\nu+1} \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2\nu+3} - 2 R \omega b_{\nu-1} \frac{\nu(\nu-1)}{2\nu-1} \right\} \\ & + c \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ geht diese Lösung in den Fall des § 12 über. Wir führen zur Vereinfachung der nun folgenden Rechnung die folgenden Abkürzungen ein:

$$\alpha_0 = -\frac{R k a_0 + 7 R b_0}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{R^2 k a_2}{4} + \frac{6}{7} R \omega b_2;$$

$$\alpha_3 = \frac{R^2 k a_3 + 7 R b_3}{10} + \frac{4}{9} R \omega b_4.$$

und für $\nu \geq 4$

$$\alpha_{\nu} = \frac{1}{\nu(\nu+1)-2}$$

$$\cdot \left\{ R^2 k a_{\nu} + 7 R b_{\nu} + 2 R \omega b_{\nu+1} \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2\nu+3} - 2 R \omega b_{\nu-1} \frac{\nu(\nu-1)}{2\nu-1} \right\},$$

dann wird:

$$f = \alpha_0 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \alpha_{\nu} P_{\nu}(\cos \vartheta).$$

Die Funktion h erhält man analog wie in § 12 aus der Gleichung (3).

Unter Benutzung des Ergebnisses für die Funktion f erhält man

$$\frac{h}{\sin \vartheta} = 2\omega(\alpha_0 + Rb_0) + \sum_{\nu=2}^{\infty} 2\omega P_{\nu}(\alpha_{\nu} + Rb_{\nu}) + P'_{\nu}(-\alpha_{\nu} + 2Rb_{\nu})(1 + 2\mu\omega) - c.$$

Mit den beiden so gewonnenen Funktionen f und h und dem Ansatz für \dot{D}/D ist nun noch der Gleichung (12, 3) zu genügen. Hieraus erhält man:

$$b_0 = -\frac{Rk\alpha_0}{6}; \quad b_3 = -\frac{35Rk}{96\omega} \left(\frac{\alpha_0}{3} + \frac{4}{5}\alpha_2 \right);$$

$$b_4 = \frac{21Rk}{736\omega^2} \left(\frac{697}{48}\alpha_0 + \frac{677}{20}\alpha_2 - \frac{492}{70}\omega\alpha_3 \right).$$

Allgemein ergibt sich die Rekursionsformel:

$$Rb_{\nu+2}2\omega^2 \frac{(\nu+2)(\nu+3)(\nu^3+4\nu^2+3\nu)}{(2\nu+3)(2\nu+5)(\nu^2+3\nu)}$$

$$+ 2R\omega b_{\nu-1} \left\{ -\frac{2\nu^3+5\nu^2+3\nu}{2\nu+3} - \frac{\nu^3+3\nu+2}{2\nu+3} + 7\frac{\nu^2+4\nu+3}{(\nu+3)(2\nu+3)} \right\}$$

$$+ Rb_{\nu} \left\{ 1 + 2\nu^2 + 2\nu - 4\omega^2 \frac{\nu^3(\nu+1)(\nu^2+4\nu+3)}{(2\nu+1)(2\nu+3)(\nu^2+3\nu)} - \frac{7}{2\nu+3} \right.$$

$$\left. + 4\omega^2 \frac{\nu^3(\nu+1)(\nu^2+2\nu-1)}{(2\nu+1)(2\nu-1)(\nu^2-\nu-2)} \right\}$$

$$+ Rb_{\nu-1}2\omega \left\{ \frac{2\nu^3+\nu^2-\nu}{2\nu-1} - \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu-1} + 7\nu \frac{\nu^3+2\nu-1}{(2\nu-1)(\nu^2-\nu-2)} \right\}$$

$$+ 2\omega Rb_{\nu-2} \frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu^2+2\nu-1)}{(2\nu-3)(2\nu-1)(\nu^2-\nu-2)} + 2\omega \frac{\nu^3+4\nu^2+3\nu}{2\nu+3}$$

$$\cdot R^2ka_{\nu+1} \frac{1}{\nu^2+3\nu} - R^2ka_{\nu} + 2\omega \frac{\nu^3+2\nu^2-\nu}{2\nu-1} R^2ka_{\nu-1} \frac{1}{\nu^2-\nu-2} = 0.$$

Es wird also wieder wie in § 12 die Größe b_{ν} proportional zu Rk , d. h. die relative Dickenänderung wird proportional zu dem Produkt aus Radius und Kraft. Da die a_{ν} die Entwicklungs-

koeffizienten von $1/D\eta$ sind, so sieht man wieder, daß *der ganze Vorgang bei konstantem Radius und konstanter Kraft nur durch das Produkt aus Dicke und Viskosität bestimmt wird.*

Das Thema dieser Arbeit wurde mir von Hrn. Prof. Dr. Madelung gegeben, dem ich auch zu großem Dank verpflichtet bin für sein großes Interesse, das er stets der Arbeit während ihrer Entstehung entgegenbrachte. Ein sehr wertvoller Ratgeber war mir dabei sein Werk über „die mathematischen Hilfsmittel des Physikers“, dem ich manche wichtige Formel verdanke.

(Eingegangen 9. Juli 1929)

***Nachweis einer direkten durch Bestrahlung
bewirkten Dissoziation der Halogenmoleküle***
Von Hermann Senftleben und Erich Germer

(Mit 1 Figur)

In den letzten Jahren ist eine Reihe von Untersuchungen ausgeführt worden, in denen auf spektroskopischem Wege die zur Dissoziation zweiatomiger Moleküle erforderliche Energie bestimmt wird. Alle diese Arbeiten gehen von der Analyse der Bandenspektren der betreffenden Gase aus. Die Untersuchung dieser Spektren, welche teils in Emission, teils in Absorption gemessen sind, ist bisher für Wasserstoff¹⁾, Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd und Stickoxyd²⁾ sowie für die Halogene Chlor, Brom, Jod durchgeföhrt.³⁾ Sie zeigte bei den verschiedenen Gasen mehr oder weniger lange Serien von Bandenkanten, deren Abstände, in Frequenzen gemessen, innerhalb der Serie gesetzmäßig abnehmen, so daß die Bandenkanten gegen eine Grenze konvergieren. Bei einigen Gasen, z. B. Jod, ist diese Konvergenzstelle direkt meßbar, bei anderen kann sie durch Extrapolation aus gemessenen Kantenabständen ermittelt werden. An die Wellenlänge, gegen die eine Kantenserie konvergiert, schließt sich nach kürzeren Wellenlängen hin ein Gebiet kontinuierlicher Emission bzw. Absorption an.

Eine Deutung dieser Beobachtungen gab zuerst Franck.⁴⁾ Die Konvergenz der Bandenkanten, d. h. die Abnahme der Größe der Schwingungsquanten mit zunehmender Oszillations-

1) E. Witmer, Proc. of the nat. acad. of sciences **12**, S. 238. 1926 u. Phys. Rev. **28**, S. 1223. 1926. (Nach Messungen von Lyman); G. H. Dieke u. J. J. Hopfield, Ztschr. f. Phys. **40**, S. 299. 1926.

2) R. T. Birge u. H. Sponer, Phys. Rev. **28**, S. 259. 1926; H. Sponer, Ztschr. f. Phys. **41**, S. 611. 1927.

3) E. G. Dymond, Ztschr. f. Phys. **34**, S. 553. 1925 u. H. Kuhn, Ztschr. f. Phys. **39**, S. 77. 1926.

4) J. Franck, Trans. Farad. Soc. **21**, Part. 3. 1925 u. Ztschr. f. phys. Chem. **120**, S. 144. 1926.

quantenzahl entspricht einer Lockerung der Bindung der beiden Atome im Molekül bei zunehmender Schwingungsenergie. An der Konvergenzstelle selbst ist die Lockerung so groß geworden, daß die Atome keinen Zusammenhalt mehr haben; hier hat das Molekül die maximal mögliche Schwingungsenergie aufgenommen. Diese ist also gleich der zur Spaltung des Moleküls erforderlichen Arbeit, welche aber nur dann mit der Dissoziationswärme (D) identisch ist, wenn die beiden Atome, in die das Molekül zerfällt, unangeregt sind. Bei nichtpolaren Molekülen, bei denen die Anregung der Molekülschwingung nur mit gleichzeitigem Elektronensprung möglich ist, ist dies nicht immer der Fall; zum mindesten eines der beiden bei der Dissoziation frei werdenden Atome erweist sich als angeregt. Ist diese Anregungsenergie (A) bekannt, so gilt, wenn ν_n die Frequenz der Konvergenzstelle und h das Plancksche Wirkungsquantum ist, die Beziehung:

$$h \cdot \nu_n = D + A.$$

Ist in der untersuchten Serie der Anfangszustand (bei Absorption) nicht der schwingungslose Zustand des Moleküls, sondern geht die Serie von einem Zustand mit der Schwingungsenergie E aus, so modifiziert sich die obige Gleichung in:

$$h \cdot \nu_n + E = D + A.$$

Für kürzere Wellenlängen als die der Konvergenzstelle tritt zu der gequantelten Schwingungsenergie die kontinuierlich verteilte Translationsenergie der beiden Atome hinzu, d. h. das Absorptions- bzw. Emissionsspektrum jenseits der Konvergenzstelle muß kontinuierlich sein.

Wie schon oben erwähnt, ist es auf Grund dieser Überlegungen gelungen, den Wert der Dissoziationswärmen bei einer Reihe von zweiatomigen Molekülen zu ermitteln. Für die Halogene Cl_2 , Br_2 und J_2 sind die Konvergenzstellen (λ_n) der Kantenserien sehr genau ermittelt worden¹⁾; auch sind für diese Gase die Werte der Dissoziationswärmen (D) auf thermischem Wege bestimmt worden, so daß ein Vergleich der Resultate möglich ist. Tab. 1 (aus der angegebenen Arbeit von W. Kuhn) zeigt, daß die Übereinstimmung der auf optischem und thermischem Wege ermittelten Werte der Dissoziationswärmen sehr gut ist

1) H. Kuhn, Ztschr. f. Phys. 39. S. 77. 1926.

und durchaus für die Franckschen Überlegungen spricht. Es schien jedoch erwünscht, einen Nachweis für das wirkliche Eintreten von Dissoziation jenseits der Konvergenzstelle zu suchen. Auf optischem Wege geschah dies in Arbeiten von Dymond¹⁾ und Ramsauer.²⁾

Tabelle 1

| Gas | <i>D</i> (optisch) | <i>D</i> (thermisch) | λ_n |
|-----------------|--------------------|----------------------|-------------|
| Chlor | 58,5 Cal | 57 Cal | 4785 ÅE |
| Brom | 45,2 Cal | 46,2 Cal | 5107 ÅE |
| Jod | 35,2 Cal | 34,5 Cal | 4995 ÅE |

Dymond untersuchte die Fluoreszenzstrahlung des Jodmoleküls. Durch Einstrahlung von Licht wird das Molekül angeregt und kann beim Rückgang in tiefere Energieniveaus Fluoreszenzlicht ausstrahlen. Dieses muß erlöschen bei Bestrahlung mit kurzwelligerem Licht als 4995 ÅE, wenn das Molekül jenseits der Konvergenzstelle dissoziiert. Dymond fand in der Tat, daß er mit einer großen Zahl von Spektrallinien, deren Wellenlänge länger ist als 4995 ÅE, Fluoreszenzspektren anregen konnte, dagegen ergaben Anregungen mit Lichtsorten, deren Wellenlängen dem kontinuierlichen Absorptionsgebiet angehören, keine Spur von Fluoreszenz. Ramsauer, der eine ähnliche Untersuchung ausführte, konnte noch mit der Bleilinie 5006 ÅE Fluoreszenzlicht anregen, was die Annahme von Königsberger und Vogt³⁾, daß die Konvergenzstelle des Jods im Maximum der Absorption bei 5060 ÅE liegt, widerlegt und eine weitere Bestätigung der Lage bei 4995 ÅE bildet.

Versuche von Wood⁴⁾, ähnliche Fluoreszenzstrahlung bei Brom und Chlor festzustellen, mißlingen. Er fand nur eine Andeutung der Bromfluoreszenz. Chlor zeigte überhaupt keine Fluoreszenz. Das erklärt sich daraus, daß die für die Fluoreszenz maßgebende Absorption im Diskontinuum bei Brom erheblich schwächer ist als im Joddampf gleichen Druckes, bei Chlor ist sie schätzungsweise 1000—10000mal so schwach als bei Jod.

1) E. G. Dymond, a. a. O.

2) G. Ramsauer, Ztschr. f. Phys. **40**. S. 675. 1927.

3) I. Königsberger u. K. Vogt, Ztschr. f. Phys. **13**. S. 292. 1923.

4) Vgl. H. Kuhn, Ztschr. f. Phys. **39**. S. 88. 1926.

Während bei Jod nach Königsberger das Maximum der Absorption im Diskontinuum bei 5060 ÅE liegt, absorbieren Brom und besonders Chlor nach Messungen von Ribaud¹⁾ dort unmerklich.

Dymond²⁾ hat dann noch versucht, die Dissoziation bei Bestrahlung mit blauem Licht direkt durch Druckänderung nachzuweisen. Die Druckmessung geschah mit einem Quarzfadenmanometer nach Haber und Kerschbaum³⁾ in der abgeänderten Form von Coehn und Jung.⁴⁾ Er untersuchte die Dissoziation im Druckgebiet von 0,03—0,001 mm Hg-Druck. Es konnte weder eine Druckzunahme, noch -abnahme festgestellt werden.⁵⁾

Die erwähnte Untersuchung von Dymond ist die einzige, in welcher nicht auf optischem Wege der Nachweis der Moleküldissoziation durch Strahlung zu erbringen versucht wird. Das Mißlingen dieses Versuches ist wohl darauf zurückzuführen, daß die Dissoziation zu klein war, um eine meßbare Druckänderung hervorzurufen.

Deshalb mußte eine empfindlichere Untersuchungsmethode angewandt werden. Eine solche ist von Senftleben⁶⁾ angegeben worden. Er benutzt die Wärmeleitfähigkeit eines Gases als Kriterium für den Dissoziationszustand desselben. Das Wärmeleitvermögen l ist bestimmt durch die Anzahl der Frei-

1) G. Ribaud, Ann. d. Phys. **12**, S. 107. 1919.

2) E. G. Dymond, a. a. O.

3) F. Haber u. F. Kerschbaum, Ztschr. f. Elektrochem. **20**, S. 269. 1914.

4) A. Coehn u. G. Jung, Ztschr. f. phys. Chem. **110**, S. 705. 1925.

5) Historisch interessant ist es, daß man lange vor Kenntnis der Bandenspektrenanalyse eine Dissoziation von Chlor und Brom durch die Einwirkung von kurzwelligem Licht angenommen hat. Budde (Pogg. Ann. **144**, S. 213. 1872) erhielt bei Bestrahlung der beiden Halogene mit rotem bis grünem Licht keine oder nur schwache Erwärmung der Gase, dagegen riefen blaues und ultraviolettes Licht trotz geringerer Intensität starke Erwärmung hervor. Da man damals die Bedeutung der selektiven Absorption noch nicht klar erkannt hatte, nahm Budde an, daß die *abnorme* Erwärmung durch sog. *chemisches* Licht durch die Wiedervereinigungswärme der primär dissoziierenden Moleküle entsteht. Die Schlußweise von Budde ist nach den heutigen Anschauungen nicht richtig. Seine Messungen sind eine reine Feststellung des Absorptionsvermögens.

6) H. Senftleben, Ztschr. f. Phys. **32**, S. 922. 1925.

heitsgrade f , die mittlere Geschwindigkeit \bar{c} und den Durchmesser δ der Teilchen, die den Wärmetransport übernehmen.

$$l = \frac{f k \bar{c}}{6 \sqrt{2} \pi \delta^2}$$

k bedeutet die Boltzmannsche Konstante. Bei der Dissoziation entstehen Teilchen von kleinerem Radius; hierdurch wird eine Vergrößerung des Wärmeleitvermögens hervorgerufen; die gleichzeitige Erhöhung der mittleren Geschwindigkeit und die Erniedrigung der Anzahl der Freiheitsgrade heben sich annähernd auf.

Das Wärmeleitvermögen läßt sich sehr genau nach der Methode von Schleiermacher messen. In dem mit dem zu untersuchenden Gas gefüllten Gefäß wird ein elektrisch geheizter Draht ausgespannt. Werden die Wände auf einer Temperatur, die niedriger als die Drahttemperatur ist, gehalten, so geht ein dauernder Wärmestrom vom Draht zu den Wänden über. Eine Vergrößerung des Wärmeleitvermögens bewirkt auch eine Vergrößerung des Wärmestromes; dies hat eine Abkühlung des Heizdrahtes zur Folge, die sich ihrerseits in einer Widerstandsabnahme des Drahtes bemerkbar macht. Eine Änderung des Wärmeleitvermögens kann also durch eine Widerstandsänderung gemessen werden. Absolutwerte des Wärmeleitvermögens sind hier nicht erforderlich; darum spielen spezielle Apparatkonstanten hier keine Rolle.

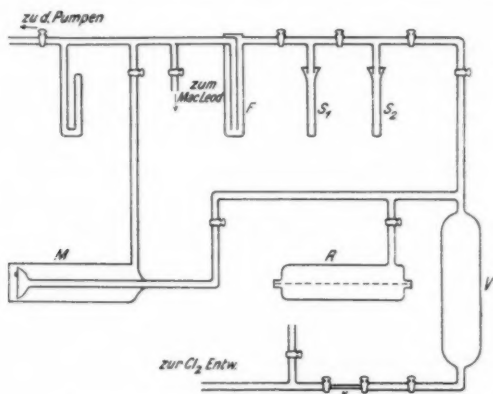
Falls Änderungen der Drahttemperatur aus anderen Gründen eintreten, wie z. B. durch Reaktionen am Draht, so sind sie stets mit Sicherheit von Änderungen des Wärmeleitvermögens zu unterscheiden. Denn die letztgenannten Änderungen sind nur bei einer Temperaturdifferenz zwischen Draht und Gefäßwand festzustellen, während Reaktionswärmen sich auch am ungeheizten Draht bemerkbar machen.

Bei den im folgenden beschriebenen Versuchen zeigte sich, daß diese Methode mit Erfolg zur Feststellung der Dissoziation der Halogene verwendet werden konnte.

Die Messungen wurden ausgeführt mit einer Apparatur, wie sie in Fig. 1 schematisch wiedergegeben ist.

Zum Evakuieren diente ein aus einer Quecksilberdampfstrahlpumpe und einer Diffusionspumpe bestehendes Pumpenaggregat, dem eine Wasserstrahlpumpe vorgeschaltet war. Es konnte ohne Schwierigkeiten ein Vakuum von $1 \cdot 10^{-6}$ mm Hg-

Druck erzielt werden. Der Druck wurde mit einem Manometer nach MacLeod gemessen. Für die Druckfeststellung bei Füllungen mit Halogenen mußte eine direkte Berührung mit Quecksilber wegen der chemischen Aktivität der Gase vermieden werden. Die bekannte Methode, das Quecksilber vor der Zersetzung durch eine inaktive Flüssigkeit (konz. Schwefelsäure) zu schützen, ist bei Arbeiten im Hochvakuum aus-



Schematische Darstellung der Glasapparatur

Fig. 1

geschlossen. In der Literatur sind eine ganze Anzahl von Manometern für aktive Gase angegeben worden. Zunächst wurden Versuche mit dem Spiralmanometer von Ladenburg und Lehmann¹⁾ in der Form von Johnson²⁾ gemacht. Dieses besteht aus einer flachen, spiralförmig aufgewundenen Glasröhre mit möglichst dünnen Wänden. Am Ende der Glasspirale, die in eine Kammer eingeschmolzen ist, in welcher der Druck variiert werden kann, ist ein Glasspiegel befestigt. Das System, dessen Druck gemessen werden soll, ist mit der Spirale verbunden. Bei Messungen wurde durch Variierung des Außendrucks auf Druckgleichheit eingestellt, was mit Hilfe des Spiegels

1) E. Ladenburg u. F. Lehmann, Verh. d. phys. Ges. 8. S. 20. 1906.

2) F. M. G. Johnson, Ztschr. f. phys. Chem. 61. S. 457. 1908.

beobachtet werden kann. Der Außendruck wird alsdann mit einem Quecksilbermanometer gemessen. Es gelang hiermit aber nur, Drucke von einigen mm Hg und mehr mit genügender Genauigkeit zu messen. Für geringere Drucke erwies sich die Spirale als zu unempfindlich.

Außerdem kam das Quarzfadenmanometer von Haber und Kerschbaum¹⁾ in Betracht. Dieses besteht aus einem dünnen Quarzfaden, der in die Kuppe eines Glasrohres eingeschmolzen ist. Der Faden wird in Schwingungen versetzt. Aus dem Abklingen der Schwingungsamplituden kann man auf den vorhandenen Gasdruck schließen. Auch dieses Manometer erwies sich in dem Druckgebiet von 0,1—1 mm Hg, in dem die Untersuchungen ausgeführt wurden, als zu ungenau.

Als brauchbar erwies sich schließlich ein Manometer *M* (vgl. Fig. 1), das nach dem Prinzip des Membranmanometers von Braune und Ramstetter²⁾ konstruiert ist. Eine dünne Glasmembran, die man durch Aufblasen einer Glaskugel und nachträgliches Zusammenfallenlassen herstellt, ist äußerst empfindlich gegen Druckunterschiede in dem fraglichen Gebiet. Da eine stärkere Durchbiegung die Membran ungünstig beeinflußt, wurde eine Nullmethode verwendet. Die Membran, die mit dem Reaktionsgefäß in Verbindung steht, wurde in ein zweites mit Luft gefülltes Gefäß eingeschmolzen, deren Druck reguliert und mit dem MacLeod-Manometer direkt gemessen werden konnte. Auf die Membran wurde seitlich ein kleiner Spiegel aufgeklebt, auf den ein Lichtzeiger geworfen wurde. Nach jeder Füllung wurde der Druck im Mantelgefäß so reguliert, daß der Lichtzeiger die Nullstellung einnahm, und dann der Druck am MacLeod-Manometer abgelesen. Auf diese Weise ließen sich Drucke von einigen mm bis zu 0,01 mm Hg mit genügender Genauigkeit messen. Da bei zufälligem geringem Überdruck die Membran sehr leicht platzte, wurde für qualitative Versuche eine bequemere volumetrische Methode benutzt. Ein bekanntes kleines Gasvolumen *v* von Atmosphärendruck wurde auf ein gegebenes großes Volumen *V* ausgedehnt (Fig. 1). Der Gasdruck läßt sich ohne weiteres nach dem Gasgesetz berechnen.

1) F. Haber u. F. Kerschbaum, Ztschr. f. Elektrochem. 20. S. 296. 1914.

2) H. Braune u. H. Ramstetter, Ztschr. f. phys. Chem. 102. S. 480. 1922.

Das Arbeiten mit den Halogenen schließt eine Verwendung des gewöhnlichen Ramsay-Hahnfettes aus, da dieses sofort zer-
setzt wird. Weil man aber ohne Hähne und Schliffe nicht aus-
kommen konnte, wurde ein hochchloriertes Hahnfett benutzt,
das nach einer Vorschrift von Wourtz¹⁾ bereitet war. Danach
werden 30 Teile Stearin und 20 Teile Paraffin 4 Stunden im
Chlorstrom und dann längere Zeit im Vakuum zur Vertreibung
der flüchtigen Produkte erhitzt. Das so bereitete Hahnfett be-
sitzt bei Zimmertemperatur praktisch keinen Dampfdruck.

Das Chlor wurde elektrolytisch aus reiner Salzsäure dar-
gestellt. Zur Befreiung von mitgerissenen Salzsäuredämpfen
passierte es eine Waschflasche mit Wasser und wurde zur Trock-
nung über konz. Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd geleitet.
Um auch Spuren von Sauerstoff und Stickstoff²⁾ zu entfernen,
strömte es durch eine Ausfrierflasche, die mit flüssiger Luft ge-
kühlt war. Dadurch kondensierte sich das Chlor, und die Rest-
gase konnten abgepumpt werden. — Zu Kontrollversuchen
wurde auch mehrmals das Chlor durch Einwirkung von Salz-
säure auf reines Kaliumpermanganat entwickelt. — Bei den
Versuchen mit Brom und Jod wurden reines Brom und
resublimiertes Jod verwendet, wie sie im Handel erhält-
lich sind.

Das Reaktionsgefäß *R* (Fig. 1) bestand für die Versuche
mit Chlor und Brom aus einem zylindrischen Glasrohr von etwa
10 cm Länge und 3 cm Durchmesser, in dessen Mitte der Meß-
draht ausgespannt war. Um das Gefäß vor Temperaturschwankungen zu schützen, war es in ein zweites zylindrisches
Gefäß eingeschmolzen, das mit Wasser gefüllt werden konnte.
Je eine Wand der beiden Gefäße war plan, um eine gleichmäßige
Bestrahlung zu ermöglichen. Für die Messungen mit Jod wurde
ein analoges Quarzgefäß benutzt, das mit einem Ansatz zum
Ausfrieren versehen und mit einem Schliff in die Glasapparatur
eingeführt war. Die Ansatzrohre S_1 und S_2 dienten zur Auf-
nahme von Phosphorpentoxyd und zur Regulierung des Dampf-
druckes durch Kältebäder. *F* ist eine flüssige Luftfalle zum
Ausfrieren von Quecksilberdampf. Die zur Messung ver-
wandten Drähte bestanden aus Platin und hatten einen Durch-

1) E. Wourtz, Journ. d. Chim. Phys. 11, S. 31. 1913.

2) Solche Verunreinigungen sind nach den Versuchen von L. Moser
(Ztschr. f. anorg. u. allgem. Chem. 110, S. 125. 1920) möglich.

messer von 0,05 oder 0,02 mm und einen Ausgangswiderstand von 5–6 bzw. 25–30 Ohm.

Die Widerstandsänderung des Meßdrahtes wurde in einer Wheatstoneschen Brückenordnung verfolgt, die in ihrem einen Zweig zwei gleiche Stöpselrheostaten enthielt, deren anderer Zweig von dem Meßdraht und einem veränderlichen Vergleichswiderstand gebildet wurde. In der Brücke lag ein Galvanometer mit einer Stromempfindlichkeit von $5 \cdot 10^{-6}$ Amp. und einem sehr kleinen inneren Widerstand von 3 Ohm. Für die eigentliche Messung der sehr kleinen Widerstandsänderungen wurde das Galvanometer durch ein 50fach empfindlicheres Spiegelgalvanometer mit objektiver Ablesung und gleichfalls geringem inneren Widerstand ersetzt. Als Stromquelle diente eine Akkumulatorenbatterie, der ein variabler Widerstand w_h vorgeschaltet war. Der Ausgangswiderstand w_0 des ungeheizten Drahtes wurde bei schwachem Strom bestimmt. Durch Regulierung von w_h wurde die Stromstärke und damit Temperatur und Widerstand des Maßdrahtes erhöht. Bei den vorliegenden Messungen wurde der Draht so geheizt, daß sich sein Widerstand um ein Drittel bis die Hälfte seines Ausgangswertes erhöhte, was einer Temperatur von 100° bis 135° entspricht. Die Brücke wurde vor der Bestrahlung abgeglichen. Eine Änderung des Wärmeleitvermögens des Gases und damit des Drahtwiderstandes konnte so durch den Ausschlag des Galvanometers festgestellt werden.

Der Zusammenhang zwischen der Änderung des Wärmeleitvermögens und der des Drahtwiderstandes (w) ist gegeben durch die Energiebilanz zwischen zugeleiteter und abgeleiteter Energie. Die dem Draht in einer Sekunde zugeführte Energie ist $i^2 \cdot w$. Ist T die Temperatur des geheizten Drahtes, T_0 die der Gefäßwände, so ist die abgeleitete Energie $\lambda \cdot (T - T_0)$, wobei der Proportionalitätsfaktor λ , in dem auch die geometrischen Konstanten der gewählten Meßanordnung enthalten sind, ein Maß für die Wärmeleitfähigkeit des Gases darstellt. Es gilt

$$i^2 w = \lambda (T - T_0) = \lambda \frac{(w - w_0)}{\alpha w_0} \quad .$$

α ist der Widerstandstemperaturkoeffizient des Drahtes, w_0 sein Widerstand bei der Temperatur T_0 . Ändert sich das Wärmeleitvermögen λ um $d\lambda$, so erfahren i und w entsprechende

Änderungen, die sich aus der Differentiation der letzten Gleichung ergeben.

$$d\lambda \frac{w - w_0}{\alpha w_0} = dw \left(i^2 - \frac{\lambda}{\alpha w_0} \right) + di \, 2i \, w.$$

Durch Anwendung der Kirschhoffschen Stromverzweigungsregeln folgt fernerhin, daß di proportional dw und dieses proportional di_g ist, wobei i_g die Stärke des durch das Galvanometer fließenden Stromes ist und die Proportionalitätskonstanten die elektrischen Konstanten der Wheatstoneschen Brückenordnung enthalten. Unter Benutzung dieser Beziehungen folgt weiter Proportionalität von $d\lambda$ und di_g . Danach ist also die Änderung des Wärmeleitvermögens direkt proportional der Änderung der Stromstärke im Galvanometer, also proportional dem beobachteten Ausschlag.

Chlor

Die ersten Versuche wurden mit Chlor ausgeführt. Das Reaktionsgefäß wurde vorher soweit evakuiert, daß das MacLeod-Manometer keinen meßbaren Druck anzeigte. Der Quecksilberdampf der Pumpen wurde durch Kondensation mit flüssiger Luft ausgefroren. Dann brachte man Chlor von gewünschtem Druck in das Gefäß. Als Lichtquelle diente eine Kohlenbogenlampe bzw. eine Quecksilberlampe unter Verwendung von Filtern, welche nur möglichst schmale Wellenlängenbereiche durch ließen. Die Untersuchungen von Franck und Kuhn ließen erwarten, daß eine Zunahme des Wärmeleitvermögens bei Bestrahlung mit Licht kürzerer Wellenlänge als 4785 ÅE (Konvergenzstelle) stattfinden würde. Das fand sich bestätigt. Bei Bestrahlung mit blauem Licht zeigte sich eine Widerstandsabnahme des geheizten Drahtes entsprechend einer Zunahme des Wärmeleitvermögens, während langwelliges Licht eine geringe Erwärmung des Meßdrahtes bewirkte. Diese Erwärmung des Drahtes war auf die Erwärmung des gesamten Gases infolge der absorbierten Strahlungsenergie zurückzuführen. Man konnte das Eintreten der Dissoziation bei Variierung der Wellenlänge aus der Umkehr des beobachteten Ausschlages des Galvanometers feststellen. Die Dissoziation war damit direkt nachgewiesen. Diese Beobachtungen decken sich vollkommen mit

den vorläufigen Versuchen von Senftleben¹⁾ über die Dissoziation des Chlors.

Im Laufe der Untersuchung zeigte sich, daß das kurzwellige Licht nicht immer den gewünschten Effekt bewirkt. Die Bestrahlung rief im Gegenteil manchmal eine Widerstandszunahme hervor.²⁾ Bei geeigneter Behandlung des Drahtes durch Glühen in der Chlorfüllung trat der Effekt normalerweise wieder auf. Das läßt sich zwanglos durch die Annahme einer *Vergiftung* des Drahtes erklären, wie sie Senftleben³⁾ für die gleiche Erscheinung bei der Untersuchung über die Eigenschaften des atomaren Wasserstoffes angenommen hat. Im unvergifteten Zustande wirkt der Platindraht katalytisch auf die Wiedervereinigung der durch Einstrahlung gebildeten Chloratome. Die dabei freiwerdende Reaktionswärme erhitzt den Draht so stark, daß der Wärmeleitungseffekt überdeckt wird. Nach der Vergiftung des Drahtes hört der Rekombinationseffekt am Draht auf, und es kann eine genügende Anreicherung der Atome stattfinden. Gewisse Anhaltspunkte für die Ursache der Vergiftung lieferten die folgenden Versuche. Durch Glühen des Drahtes in Luft oder im Vakuum war keine genügende Vergiftung zu erzielen, wohl dagegen durch Glühen des Drahtes in Chlorgas. Um die Wirkung evtl. Verunreinigungen des Gases festzustellen, wurde das Chlor (außer der üblichen Reinigung und Trocknung durch konz. Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd) von permanenten Gasen durch Kondensation in flüssiger Luft und Abpumpen der Restgase befreit. Etwa im Draht okkludierte Gase wurden durch Glühen desselben im Vakuum entfernt. Hinterher ließ sich durch Glühen in der Chlorfüllung der Draht nach wie vor vergiften. Zur weiteren Kontrolle wurde das Chlor, statt es elektrolytisch zu entwickeln, aus Salzsäure und Kaliumpermanganat oder durch Erhitzen von reinem Goldtrichlorid dargestellt. Es ließ sich keine Veränderung der Vergiftungserscheinung feststellen. Die Vergiftung hängt demnach wohl mit der Bildung von Platinchlorid und Platin-kristallen am Draht zusammen, wie man sie bei einem in einer

1) H. Senftleben, Ber. d. Ges. z. Beförderung d. ges. Naturwiss. Marburg 1927. S. 419.

2) Vgl. die Bemerkung auf S. 851.

3) H. Senftleben, Ztschr. f. Phys. 33. S. 871. 1925.

Chloratmosphäre elektrisch geglühten Draht beobachtet hat.¹⁾ Nach Glühen des Platindrahtes bei einem Druck von mindestens 1 mm Hg war auch hier deutlich ein geringer gelber Beschlag des Gefäßes von Platinchlorid zu erkennen. Der Draht „entgiftete“ sich allmählich und der Effekt wurde kleiner. Man konnte ihn aber durch abermalige Behandlung des Drahtes wieder steigern. Ab und zu mußten die Chlorfüllung sowie das Drahtmaterial erneuert werden.

Die Messungen wurden bei einem Druck von 0,1—1 mm Hg ausgeführt. Innerhalb dieses Gebietes war der Effekt vom Druck unabhängig. Bei kleineren Drucken wurde er zu klein, bei größeren Drucken überwog die Erwärmung. Einen bestimmten Druck erreichte man am einfachsten durch Abkühlung des Gases auf eine Temperatur, bei der der Dampfdruck gleich dem gewünschten Druck ist. Dazu wurden bei Chlor als Kältebad gleiche Teile schmelzenden Äthers und Schwefelkohlenstoffs, die durch Abkühlen der Substanzen in flüssiger Luft erhalten waren, verwandt. Das Bad entspricht einer Temperatur von -126°C , bei der der Dampfdruck nach Henglein²⁾ 0,26 mm Hg beträgt.

Um das Einsetzen des Effektes, wie es qualitativ durch Benutzung von Filtern festgestellt war, bei einer bestimmten Wellenlänge genauer zu verfolgen, wurde das Licht mit einem Monochromator spektral zerlegt. Doch erwies sich dieser trotz Verwendung einer starken Bogenlampe als Lichtquelle zu lichtschwach.

Durch Bestrahlung mit einzelnen durch Filter ausgeblendeten Linien der Quecksilberlampe konnte eine ungefähre Festlegung der Wellenlänge, bei der die Dissoziation einsetzte, gewonnen werden. Während die Linie 4912 Å eine geringe Erwärmung des Drahtes hervorrief, trat bei der Bestrahlung mit der Linie 4359 Å eine Abkühlung des Drahtes ein. Um die Konvergenzstelle des Chlors, die nach Kuhn bei 4785 Å liegt, enger einzugrenzen, wurde das Licht eines Kadmium- und Zinkfunkens benutzt, die beide in der fraglichen Spektralgegend starke Linien aussenden. Als Stromquelle diente eine Wechselstrommaschine in Verbindung mit einem Resonanztransformator.

1) K. Gmelin-Kraut, Handb. d. anorg. Chem. V. 3. S. 166. 7. Aufl. 1915.

2) F. A. Henglein, Ztschr. f. Phys. 11. S. 1. 1922.

Parallel zur Funkenstrecke lagen 2 große Leidener Flaschen. Bei einer Leistung von etwa 2 kW wurde eine genügende Lichtintensität des Funkens erzielt. Zur Bestrahlung mit einzelnen Linien war die Verwendung von Filtern unerlässlich. Da hierdurch die Intensität stark geschwächt wurde und die Ausschläge auf dem Spiegelgalvanometer stark verkleinert wurden, mußte dies Instrument gegen die elektrische Beeinflussung durch den Funken sorgfältigst abgeschirmt werden. Die Funkenstrecke, die im Brennpunkt eines Metallhohlspiegels stand, sowie der Transformator und die Leidener Flaschen wurden in einem geschlossenen eisernen Kasten aufgestellt. Hierdurch ließ sich die Einwirkung auf das Galvanometer so weit abschwächen, daß Messungen ausgeführt werden konnten. Die zur Ausblendung verwandten Filter wurden an einem König-Martensschen Spektralphotometer auf ihre Durchlässigkeit hin untersucht. Brauchbar für den vorliegenden Zweck waren einige Wrattenfilter und Lifa-Lichtfilter, die ein verhältnismäßig schmales Durchlässigkeitsgebiet besaßen und evtl. bei Kombination zweier Filter praktisch nur eine Linie mit einiger Intensität durchließen. — Zur genaueren Feststellung wurden mit einem Spektrographen Spektrogramme der so erhaltenen Funkenlinien aufgenommen. — Man bestrahlte zunächst das Meßgefäß mit der Bogenlampe mit vorgesetztem blauen Filter, das nur Wellenlängen, die kleiner als 4800 ÅE sind, durchläßt, um die Vergiftung des Drahtes zu prüfen. Erhielt man genügend großen Effekt, so wurden die eigentlichen Messungen vorgenommen. Bei Bestrahlung des Chlors mit den Linien 4811 ÅE und 4800 ÅE war keine Dissoziation nachzuweisen, wohl aber setzte dieselbe sofort ein, wenn das Gas dem Lichte der Wellenlängen 4722, 4680 und 4678 ÅE ausgesetzt wurde. Damit ist die gesuchte Grenzwellenlänge auf das Gebiet 4722—4800 ÅE eingeschränkt, d. h. auf ein Wellenlängenbereich von nur ca. 80 ÅE. Der optisch bestimmte Wert der Konvergenzgrenze liegt bei 4785 ÅE, d. h. innerhalb des hier festgelegten Intervalls (vgl. Tab. 2 auf S. 863).

Brom

Für dieses Gas wurden ganz analoge Versuche vorgenommen. Es zeigten sich gegenüber Chlor Unterschiede sowohl in der nötigen Vorbehandlung des Drahtes, als auch in der Größe des Effektes. Durch Glühen des Drahtes in der Bromfüllung ließ

sich keine genügende Vergiftung erreichen. In Übereinstimmung damit steht die Beobachtung, daß Bromdampf auf elektrisch geglühten Platindraht in viel geringerem Maße einwirkt als Chlor.¹⁾ Es bildet sich wohl noch Platinbromid, doch konnte ein Auftreten von Platinkristallen nicht beobachtet werden. Der Draht wurde hier durch Glühen im Vakuum vergiftet.²⁾ Der Effekt war bedeutend kleiner als bei Chlor. Während dort z. B. die Bestrahlung mit der Bogenlampe und einem von 4800 bis 4000 ÅE durchlässigen Filter einen Ausschlag von 10 bis 20 Skalenteilen auf dem gewöhnlichen Galvanometer hervorrief, war beim Brom bei gleichartiger Bestrahlung nur ein Ausschlag von einem Skalenteil zu beobachten. Das läßt sich aus der Verschiedenheit der Absorption der beiden Halogene erklären.³⁾

Während Chlor im ganzen sichtbaren Spektrum kaum absorbiert, zeigt Brom im kurzwelligen sichtbaren Gebiet, wie es durch das benutzte Filter ausgesondert wird, starke Absorption. Daher wird zwar die Dissoziation bei Brom erheblich stärker sein; aber infolge des Anwachsens der Zahl der durch die Dissoziation entstandenen Atome wächst auch die Zahl der Wiedervereinigungen sehr erheblich. (Nach der Dreierstoßtheorie⁴⁾ mit der dritten Potenz der Konzentration der Atome.) Es wird eine starke Erwärmung des ganzen Gases eintreten, die den Abkühlungseffekt des Gases vermindern oder sogar überdecken kann. Im gleichen Sinne wirkt die Tatsache, daß die „Vergiftung“ des Drahtes nicht so vollkommen wie bei Chlor zu erreichen war.

Die Ausführung der Messungen geschah auf die gleiche Weise wie bei Chlor. In das Ansatzrohr S_1 füllte man etwas flüssiges Brom, das während des Auspendens durch flüssige Luft kondensiert war. Der Dampfdruck wurde durch eine Kältemischung geregelt. Der Druck betrug bei den Messungen 0,25 mm, was einer Temperatur von $-63,1^\circ \text{C}$ entspricht. Trotz

1) K. Gmelin-Kraut, Handb. d. anorg. Chem. V. 3. S. 167.

2) Der Begriff der „Vergiftung“ wird künftig in einer erweiterten Bedeutung gebraucht. Er soll nur die Tatsache ausdrücken, daß am vergifteten Draht keine Rekombination der Atome stattfindet. Bei Brom und auch bei Jod zeigt gerade der reine Draht diese Eigenschaft.

3) G. Ribaud, Ann. d. Phys. 12. S. 107. 1919.

4) M. Born u. I. Frank, Ann. d. Phys. 76. S. 225. 1925; Ztschr. f. Phys. 31. S. 411. 1925.

erheblich größerer Schwierigkeiten gelang es schließlich, die Konvergenzstelle unter Anwendung des Kadmium- und Zinkfunkens festzulegen. Bestrahlte man mit den gleichen Linien, welche beim Chlor Dissoziation bewirkten, so erhielt man in allen Fällen auf dem Spiegelgalvanometer einen kleinen Ausschlag, der einer Abkühlung also Dissoziation entsprach. Auch bei Benutzung von Filtern, die außerdem noch die Zinklinie 4912 ÅE durchlassen, war eine Abkühlung zu beobachten. Die Linien 4678, 4680, 4722, 4800, 4811 und 4912 ÅE rufen also Dissoziation hervor. Bestrahlte man mit der Kadmiumlinie 5086 ÅE, so erhielt man einen Abkühlungseffekt, der innerhalb der Fehlergrenze lag. Es liegt hier also die Möglichkeit der Dissoziation vor, wie sie die Lage der Konvergenzstelle nach Kuhn bei 5107 ÅE fordert. Dagegen rief die Bestrahlung mit den Kadmiumlinien 5339 und 5379 ÅE, die sich durch Filter nicht trennen ließen, deutlich sichtbare Erwärmung hervor. Näher konnte man von der langwelligen Seite nicht an die Konvergenzstelle herankommen, da in diesem Gebiet die in Frage kommenden Metalle keine starken Linien aussenden. Immerhin gibt die Untersuchung eine befriedigende Bestätigung der Lage der Konvergenzstelle (vgl. Tab. 2 auf S. 863).

Jod

Die bei Brom aufgetretenen Schwierigkeiten gelten für Jod in verstärktem Maße. Die Absorption im Sichtbaren ist noch größer.¹⁾ Es gelang zunächst nicht irgendeinen Abkühlungseffekt bei Bestrahlung mit blauem Licht festzustellen. Es wurde auf alle mögliche Weise eine Vergiftung des Platindrahtes versucht. Aber weder Glühen in der Jodfüllung²⁾, noch in Atmosphärenluft oder im Vakuum begünstigten ein Eintreten des gesuchten Effektes. Da Jod nicht so chemisch aktiv ist, wurden Versuche mit Nickel-, Tantal- und Molybdändrähten unternommen, ohne daß ein Effekt wahrnehmbar war. Schließlich wurde nach der Dampfdruck von 0,005—16 mm verändert. Die Regulierung des Dampfdruckes geschah teils durch geeignete Kältebäder, teils durch elektrische Heizung des mit

1) K. Vogt u. I. Königsberger, Ztschr. f. Phys. 13. S. 299. 1923.

2) Hierbei bildet sich nur spurenweise Platinjodid und keine Platin-kristalle. (Vgl. Gmelin-Kraut, Handb. d. anorg. Chem. V. 3. S. 167.)

Wasser gefüllten Mantelgefäßes. Durch die Wärmeträgheit des Wassers ließ sich bei geeigneter Abschirmung eine genügend konstante Temperatur erreichen. Aber alle Versuche schlugen fehl.

Da nach bisher unveröffentlichten Untersuchungen von O. Riechemeier und H. Senftleben¹⁾ über die Wiedervereinigung der Wasserstoffatome auch die Gefäßwände eine wichtige Rolle bei der stattfindenden Reaktion spielen, wurde statt des Glasgefäßes ein Quarzgefäß benutzt. Verwandte man dieses mit einem im Vakuum geglühten Platindraht, zeigte sich tatsächlich bei Bestrahlung mit der Bogenlampe und dem oben bei Chlor und Brom benutzten blauen Filter ein deutlicher Effekt, der allerdings noch bedeutend kleiner als bei Brom war, und einen Ausschlag von 1—2 Skalenteilen des Spiegelgalvanometers hervorrief. Der Dampfdruck betrug etwa 0,07 mm, was einer Temperatur von etwa 10° C entspricht. Da die Temperatur nahe bei Zimmertemperatur liegt, war die Meßanordnung äußerst empfindlich gegen Temperaturschwankungen. Bei der Kleinheit des Effektes und bei Berücksichtigung der sonstigen Schwierigkeiten war es ausgeschlossen, die Konvergenzstelle durch Bestrahlung mit einzelnen Funkenlinien festzustellen. Schon durch die Temperaturschwankungen war das Galvanometer selten in Ruhe. Die Überlagerung der elektrischen Beeinflussung macht die Messung unmöglich, zumal da die Größe der zu erwartenden Ausschläge innerhalb der Fehlergrenze der Meßgenauigkeit lag.

Es wurde daher das Reaktionsgefäß mit möglichst schmalen kontinuierlichen Spektralbereichen der Bogenlampe (durch Vorschaltung von Filtern erhalten), die nahe diesseits und jenseits der zu erwartenden Konvergenzstelle lagen, bestrahlt. Eine Filterkombination, die für Wellenlängen von 4600—5000 ÅE durchlässig ist, gab einen Ausschlag von $\frac{2}{10}$ Skalenteilen im Sinne eines Dissoziationseffektes, eine Filterkombination mit einer Durchlässigkeit im Gebiet von 5000—5300 ÅE dagegen 50 Skalenteile, die einer Erwärmung entsprachen. Die völlige Änderung der Reaktion bei dem Übergang zu kürzeren Wellenlängen als 5000 ÅE zeigte eine Energiebetrachtung besonders deutlich. Berechnet man die *absorbierte* Energie

1) Erscheint in der Phys. Zeitschr. 1929.

unter Berücksichtigung des Extinktionskoeffizienten des Jods für die betreffenden verschiedenen Wellenlängen und der Durchlässigkeit der Filter, wobei die einfallende Energie der Bogenlampe aus dem Planckschen Strahlungsgesetz unter Zugrundelegung einer Temperatur von etwa 4000° erhalten ist, so zeigt sich, daß bei Bestrahlung mit dem kurzwelligeren Licht bedeutend mehr Energie aufgenommen wird. Trotzdem tritt *keine* Erwärmung ein, während die Bestrahlung mit *längeren* Wellenlängen bei *kleinerer* Energieaufnahme eine große Erwärmung bewirkt.

Die Deutung dieser Verhältnisse als Eintreten von Dissoziation durch die Wirkung des kurzwelligen Lichtes steht im besten Einklang mit der optischen Bestimmung der Konvergenzstelle des Jods bei 4995 ÅE, wenn sich auch eine so genaue Festlegung wie bei Chlor und Brom nicht ermöglichen ließ.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Es wird eine Methode angegeben, welche es ermöglicht, die Dissoziation der Halogene unter der Einwirkung von Strahlung direkt festzustellen. Bei der Untersuchung, durch welche Wellenlängen des einwirkenden Lichtes eine Dissoziation eintritt, ergibt sich, daß diese Wellenlängen kürzer sein müssen als die Konvergenzstellen der Bandenkanten, in Übereinstimmung mit der Franckschen Theorie der Dissoziation mehratomiger Moleküle. Die längsten Wellenlängen, bei denen noch gerade Dissoziation nachweisbar ist, liegen bei allen drei Halogenen in unmittelbarer Nähe der optisch bestimmten Grenzen der Kantenserien. Eine Übersicht über die Ergebnisse und ihre Genauigkeit gibt Tab. 2.

Tabelle 2

| λ in ÅE | 4678 | 4680 | 4722 | 4800 | 4811 | 4912 | 5086 | 5339 | 5379 | Optisch bestimmte Konvergenz- stelle |
|-----------------|-----------|------|------|------|------|-----------|------|------|------|---|
| Gas | | | | | | | | | | |
| Chlor ... | + | + | + | - | - | - | - | - | - | 4785 ÅE |
| Brom ... | + | + | + | + | + | + | +(?) | - | - | 5107 ÅE |
| Jod | 4600—5000 | | | | | 5000—5300 | | | | 4995 ÅE |
| | + | | | | | - | | | | |

Das Zeichen + bedeutet, daß bei Bestrahlung mit Licht der betreffenden Wellenlänge Dissoziation nachweisbar ist. Das Zeichen - bedeutet, daß Dissoziation nicht nachweisbar ist.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Breslau ausgeführt. Dem Direktor desselben, Hrn. Prof. Dr. Cl. Schaefer, sind wir für sein liebenswürdiges Entgegenkommen zu großem Dank verpflichtet.

Die bei den Versuchen benutzten Apparate sowie die Mittel für die Glas- und Quarz-Apparatur wurden in sehr dankenswerter Weise von der Helmholtz-Gesellschaft sowie vom Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, den
9. Juli 1929.

(Eingegangen 17. Juli 1929)

**Über Funkenerregung
kurzer elektrischer Wellen unter 1 m Wellenlänge
und einen neuartigen Stoßfunkensender**

Von W. Pupp

(Mit 28 Figuren)

Die Erzeugung elektromagnetischer Wellen durch Funkenüberschläge ist seit ihrer Entdeckung durch H. Hertz so häufig untersucht worden, daß diese Summe von Erfahrungen zu einer gewissen Beherrschung der Dinge geführt hat. Bei Untersuchungen mit Hilfe kurzer Wellen ist man jedoch meist auf langwierige Vorversuche angewiesen, da Angaben über Begleitumstände in der einschlägigen Literatur nur wenig zu finden sind. Viele Zusammenhänge sind systematisch offenbar noch nicht untersucht, jedenfalls aber nicht veröffentlicht worden. Seit Verwendung der Elektronenröhren als Schwingungserzeuger hat zudem die Funkenerregung als solche sehr an allgemeinem Interesse verloren, und neuerdings hat nach dem Vorgange von H. Barkhausen und K. Kurz (1) die Elektronenröhre insbesondere durch K. Kohl (2) auch für Kurzwellengebiete weit unterhalb der 1-m-Grenze Verwendung gefunden. Trotzdem hat bei Untersuchungen in diesem Gebiete, die sich meist auf Dispersion und Absorption beziehen, die Funkenerregung gewisse Vorteile, die vor allem in der höheren Leistung und leichteren Frequenzverstellung bestehen. Einer neueren Veröffentlichung von H. Heim (3) kann man entnehmen, daß die Einstellung eines Röhrensenders so hoher Frequenz ziemlich schwierig ist. Seine Dispersionsmessungen sind auch nur bei fünf verschiedenen Wellenlängen gemacht worden, für welche Brückenstellungen, Spannungen usw. genau notiert waren. Die Methode von Kohl ist noch nicht so in allgemeinen Gebrauch gekommen. Die folgenden Untersuchungen sollen daher einen Beitrag zur Aufklärung der verschiedenen Voraussetzungen für eine gute Stoßfunkenerregung

kurzer Wellen und damit die Grundlage zu einem möglichst störungsfreien Arbeiten liefern. Die angegebenen Versuchswerte sind nur eine willkürliche Auswahl, werden aber zur Orientierung ausreichen. Die angegebenen kürzesten Wellen sind jedenfalls nicht die untere Grenze, wie weitere hier nicht aufgeführte Versuche gezeigt haben. Mit Rücksicht auf die Kompliziertheit der Vorgänge bei der Auf- und Entladung des Oszillators soll bei deren Darstellung in gleicher Weise nach und nach ins Einzelne vorgedrungen werden, wie es bei der experimentellen Untersuchung nötig war.

Einige Grundgedanken, die an der Ausbildung des Stoßkreises mit Erfolg beteiligt waren, lassen sich sicher auch auf Nachbargebieten nützlich anwenden, wo Funkenstrecken in Tätigkeit treten, so z. B. bei Wanderwellenuntersuchungen und Hochfrequenz-Kinematographie.

Bisherige Arbeitsweise mit Funkenoszillatoren

1. Funkenoszillatoren von großer Dämpfung

Als erster arbeitete P. Drude (4) im fraglichen Wellengebiet, und zwar mit dem sogenannten Blondlotschen Erreger. Die Funkenstrecke befand sich in Petroleum oder Alkohol. A. Colley (5) hat einen Sender gebaut, der größere Veränderung der Wellenlänge bei kleinerer Dämpfung erlaubte. Die Hauptfunkenstrecke lag auch in Petroleum, dazu kamen vier Luftfunken. Verschmutzung und Erwärmung bedingten eine unkontrollierbare Frequenzänderung. Für wesentlich kürzere Wellen geeignete Oszillatoren wurden aus dem linearen Oszillator von H. Hertz (6) durch A. Righi (7), P. Lebedew (8), A. Lampa (9), W. Möbius (10) und E. Nichols und Tear (11) entwickelt. Bei allen wurden Funken in Öl — bei letztgenannten sogar unter einigen Atmosphären Überdruck — zur Erregung der Schwingungen verwandt. Als Stromquelle diente meist der Funkeninduktor, zum Teil mit Tesla-Resonanztransformator. Die beiden letztgenannten verwandten 500 bis 1000 periodigen Wechselstrom. Bei allen diesen Oszillatoren waren neben der Hauptfunkenstrecke noch eine mehr oder weniger große Zahl von Trennfunken nötig, zum Teil — gewollt oder ungewollt — als Erzeuger einer Zwischenfrequenz tätig. Dem Streben nach Erreichung immer kürzerer Wellen verdanken die Konstruktionen von A. Glagolewa-Arkadiewa (12) und M. Le-

witzky (13) ihre Entstehung, elektromagnetische Strahler, die mit ganzen Serien von einzelnen linearen Oszillatoren zwecks Erhöhung der Gesamtleistung arbeiten. Auch hier handelt es sich um Funkenüberschläge in Öl. Die erforderliche hohe Spannung liefert ein Funkeninduktor bzw. Teslatransformator.

2. Funkenoszillatoren mit Stoßerregung

Der Tätigkeit des Funkens bei der Wellenerzeugung wandte als erster in diesem Frequenzgebiet G. Mie (14) eingehendes Interesse zu. Die weiteren Untersuchungen von H. Rukop (15), E. Rückert (16) und R. Weichmann (17) lehrten, daß die erregten Wellen die geringste Dämpfung aufweisen, wenn man es mit der durch M. Wien bekannten Löschfunkenenerregung zu tun hat. Dabei wird von zwei miteinander gekoppelten Schwingungskreisen der eine mittels Funkendurchschlags zu stark gedämpften Schwingungen angestoßen. Der zweite gerät in Eigenschwingungen und kann diese nach Aufhören der Schwingungen des ersten Kreises ungestört auspendeln lassen. Das Ergebnis ist um so besser, je weniger Oszillationen durch den Funken hindurch erfolgen. Das erreichten die eben genannten durch die Bau- und Betriebsweise ihrer Oszillatoren. Sie bestanden aus einer kupfernen Plattenfunkenstrecke und damit direkt verbundenen quadrantenförmigen Kondensatorplatten. Als Dielektrikum dazwischen diente eine Hartgummiplatte von 0,2 mm Dicke. Die Funkenstrecke war von einer Kammer umgeben, durch die Leuchtgas geschickt wurde. Mit diesem Stoßkreise von festen dielektrischen Daten war ein zweiter Schwingungskreis gekoppelt, dessen Eigenwellenlänge in einfacher Weise durch Betätigung eines posaunenartigen Auszuges verändert werden konnte. Als Stromquelle bei Rukop diente ein für 30 cm Schlagweite bemessener Induktor mit einem „Rotax“-Quecksilberunterbrecher bei 12 bis 15 Unterbrechungen je Sekunde. Die Zuleitungen waren abgeschirmt. Es wurde ballistisch gemessen, d. h. der Oszillator immer nur kurzzeitig beansprucht. Die Plattenfunkenstrecke bestand aus Kupfer oder Messing (Silber ergab in Verbindung mit Leuchtgas kleine Intensität, Zink 50 Proz. Schwankung). Der Plattendurchmesser war 3 bis 4 mm, die Schlagweite 0,02 bis 0,06 mm. Die Funkenfläche mußte genau konzentrisch zusammengebaut werden. Über den Einfluß des Dielektrikums des Kondensator-

quadranten gibt Rukop nur an, daß Glas und Glimmer ganz unbrauchbar waren. Veränderungen der Dicke des Dielektrikums, Abhängigkeit von Funkenlänge und Beschickung mit Gasen wurden auch untersucht, und dabei Leuchtgas als das beste gefunden. Über Wellenbereich und Intensitätsverteilung werden experimentelle Ergebnisse vorgelegt. Rukop sagt (a. a. O.): „Infolge der ungenau definierten Größen des Plattenkreises ist es nicht möglich, die Wellenlänge zu berechnen, die ein Erreger liefern kann, ebenso einen Erreger für eine bestimmte Hauptwellenlänge zu bauen.“

Den Bedürfnissen der Funkentelegraphie entsprangen eine Reihe von Untersuchungen (18 bis 23) über Stoßerregung, unter denen die von M. Wien besonders hervorzuheben sind. Dazu sei aber bemerkt, daß es sich um viel größere Wellenlängen handelt und die Erfahrungen nicht ohne weiteres auf das hier behandelte Gebiet übertragen werden können. Der Einfluß des Elektrodenmetalls (18) äußert sich in der Richtung, daß Silber und danach Kupfer die größte Funkendämpfung von 0,09 bzw. 0,12 aufweisen. Wien (19) gibt an, daß er die beste Löschwirkung bei Silber fand, und zwar bei sogenannten Zischfunken. „Am Klang des Funkens ist deutlich zu erkennen, ob der Funke gelöscht wird.“ Eine größere Funkenzahl wird durch Verwendung des Boasschen Resonanzinduktors erreicht. Die Verwendung der Löschröhren (20) in Verbindung mit Löschfunkenstrecken dürfte auf die größeren Wellenlängen beschränkt sein.

Der neue axialsymmetrische Oszillator und die neue Betriebsweise

3. Gesichtspunkte bei Konstruktion und Behandlung des Stoßkreises

Von der Mieschen Bauart ausgehend hat Verfasser einen Oszillator entwickelt, der nach kürzeren Wellen hin den lückenlosen Übergang zum Hertzschen Oszillator darstellt und als Ergebnis der Anwendung einer Reihe von konstruktiven Gesichtspunkten betrachtet werden kann:

- a) Symmetrie in elektrischer Beziehung. Dadurch der theoretischen Behandlung auch zugänglicher.
- b) Verkleinerte Induktivität, auf gleiche Kapazität bezogen.

c) Vollständige Ausnützung der zugeführten Gasmengen zur Kühlung der Funkenbahn und Elektrodenoberflächen.

d) Leichte Präzisionsherstellung auf der Drehbank.

e) Leichtes Auseinandernehmen der Funkenstrecke zwecks Kontrolle, sowie selbsttätig genaues Zentrieren und Parallelstellen der Funkenstrecke beim Zusammensetzen.

f) Gute äußere Wärmeableitung von der Funkenstrecke weg, daher stundenlanger Dauerbetrieb ermöglicht.

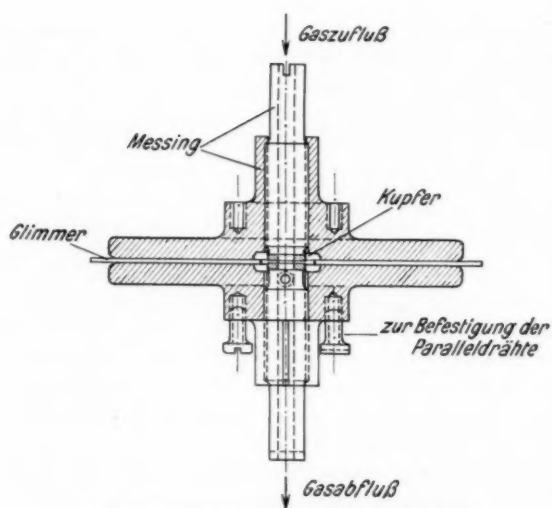
g) Große Kontaktfläche zwischen Bolzen- und Muttergewinde ist notwendig, da hohe Strombelastung (einige 100 Amp.).

h) Mechanische Festigkeit gegen elektrostatische Kräfte. Zudem sind Versuche mit höheren Gasdrucken möglich.

i) Die beiden Hälften des Oszillators werden an der Stelle zwecks Einspannung gefaßt, wo elektrisches Feld am kleinsten. Daher kleine dielektrische Verluste.

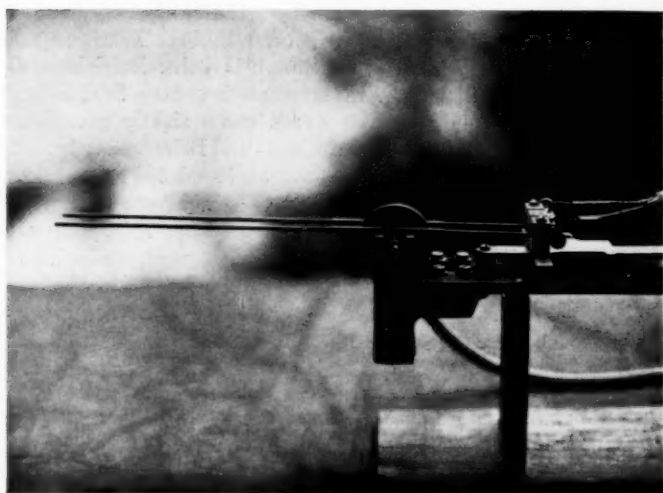
k) Glimmer wurde als Dielektrikum auch mit Rücksicht auf seine thermischen Eigenschaften gewählt.

So ergab sich über eine Reihe von Übergangsformen hinweg der in Fig. 1 gezeigte Oszillator. Bei der Anfertigung der beiden Hauptelemente: Kondensatorscheibe mit Muttergewinde und Funkenelektrode mit Bolzengewinde ist höchste Präzision anzustreben, da hiervon die Brauchbarkeit beim Betriebe entscheidend abhängt. Dazu gehört vor allem genaue Zentrierung aller Bohrungen und Gewinde durch einen richtig gewählten Arbeitsgang. Die Ganghöhe von Mutter- und Bolzengewinde muß genau übereinstimmen. Das Gewinde darf auch bei Erwärmung im Betriebe nicht im geringsten klappern. Eine gleichmäßig federnde Passung läßt sich durch die aus der Zeichnung ersichtliche Schlitzung erreichen, wenn man nach deren Herstellung (Grat sorgfältig entfernen) einen zu diesem Zwecke hergerichteten etwas schwächeren Schraubenbolzen in das Muttergewinde hineinschraubt und dann den geschlitzten Teil der Mutter an seiner Wurzel etwas (z. B. im Schraubstock) zusammenpreßt. Die Schraubelektrode wird dann mit stets gleichmäßiger Reibung bei allen Betriebsumständen einstellbar sein. Die Zentrierung beim Zusammensetzen erfolgt durch einen Stahlstift, der durch die durchgehende Bohrung der einen Funkenelektrode gesteckt wird und bis nach dem Zusammenspannen in das letzte Ende der anderen Elektrode (mit der



Konstruktionszeichnung des neuen Oszillators

Fig. 1



Zusammengebauter Oszillator

Fig. 2

Querbohrung) hineingreift. Ist durch Fehler im Betriebe (z. B. Aussetzen der Gaszufuhr) ein Nacharbeiten der Funkenflächen notwendig geworden, so genügt bei geringeren Unebenheiten einfaches Schleifen auf einem eben aufgespannten Stück feinen Schmirgelpapiers, wobei der Kondensatorteller als Geradföhrung und das Feingewinde zur Einstellung des Schleifdruckes dienen. Meist ist ein sauberes Abdrehen vorzuziehen, zu welchem Zwecke man die Oszillatorplatten nicht auseinanderzunehmen, sondern nur den Elektrodenbolzen herauszuschrauben braucht. Das Einspannen erfolgt am besten längs der ganzen Gewindeoberfläche, aber ohne sie zu verletzen. Fig. 2 zeigt den Oszillator betriebsfertig zusammengebaut. Die Kopplung von Stoßkreis und Schwingkreis ist elektrisch und magnetisch gemischt, der Kopplungsgrad für gute Energieübertragung geeignet, wie aus Leistungsmessungen und Dämpfungsbestimmungen hervorgeht. Immerhin ist eine Verbesserung dieser Größen durch Abänderung der Kopplung denkbar und konstruktiv leicht erreichbar.

4. Entwicklung einer neuen Betriebsweise von Stoßfunkenoszillatoren

Für Meßzwecke braucht man konstante Energieerzeugung. Diese wird gewöhnlich durch geeignete Schwingungskreise und Thermoelemente in Verbindung mit einem Spiegelgalvanometer beobachtet. Die Anordnung wirkt dabei integrierend über die Zeit. In welcher Gruppierung die einzelnen gedämpften Wellenzüge ankommen, ist zunächst gleichgültig, wichtig ist nur, daß die regelmäßige Energieperiode dieser Gruppe genügend kleine Dauer gegenüber der Schwingungsdauer des Anzeigeinstrumentes hat. Durch Vergrößerung der Schwingungsdauer wird man eine scheinbare Verbesserung der Konstanz erreichen. Das ist bei Beurteilung der Gleichmäßigkeitsangaben verschiedener Autoren zu beachten. Wie sieht die Gruppe bei den einzelnen bisher üblichen Betriebsarten aus? Verfasser hat zur Beobachtung der Entladungseinteilung ein einfaches Verfahren angewandt, das auch die Maximalamplitude des einzelnen gedämpften Wellenzuges zu beurteilen gestattet. Ein elektrodenloses, mit He-Ne-Gemisch von 3 mm Qu.-S.-Druck gefülltes Glasröhrchen ist zwischen die Enden der Paralleldrähte des Oszillators mit seiner Längsachse parallel zu diesen gebracht

(Fig. 3). Durch jeden hochfrequenten Wellenzug wird die Gas-säule zum Leuchten angeregt, sofern die Feldstärke ausreicht. Je höher diese wird, desto länger wird das zum Leuchten angeregte Stück. Betrachtet man diese Leuchtröhre im Drehspiegel, dessen Drehachse parallel zur Röhrenachse liegt, so erhält man bei geeigneter Drehgeschwindigkeit ein stehendes Bild der Gruppeneinteilung, wobei die Berandungskurve die Maximalamplituden der hochfrequenten Wellenzüge wiedergibt. Auch die einfache Betrachtung der Leuchtröhre mit bloßem Auge gestattet eine bequeme Beurteilung der Gleichmäßigkeit des Oszillatorbetriebes. Die Farbe und die Helligkeitsverteilung steht damit in eigenartigem Zusammenhang und jede Schwankung macht sich durch auffälliges Flackern bemerkbar. In

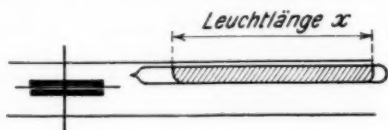
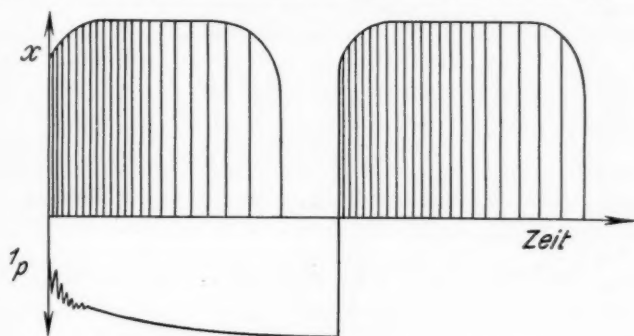


Fig. 3

Zur Drehspiegelbeobachtung

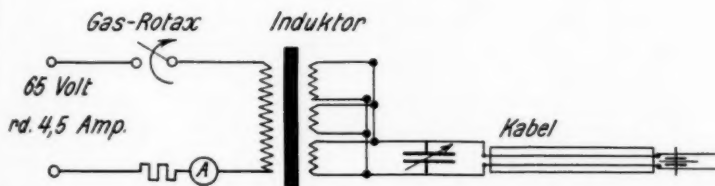
Fig. 4a ist das Drehspiegelbild einer Gruppe bei „Induktorbetrieb“ gezeichnet. Genau genommen ist das noch keine Definition, denn das Ergebnis bei Induktorbetrieb kann sehr verschieden ausfallen. Es gilt dabei so ziemlich als selbstverständlich, daß parallel zum Oszillator und zur Überspannungsseite des Induktors eine Kapazität zu schalten ist (Fig. 4b), deren Größe „sorgfältig ausprobiert“ werden muß, wenn man gute Konstanz erreichen will. Diese Kapazität wird durch den Induktor aufgeladen und währenddessen durch die Funkenstrecke des Oszillators ruckweise entladen, also im wesentlichen ohne Stromumkehr in der Zuleitung zum Oszillator. Nur bei der Unterbrechung des Induktorprimärstromes ist die Stromrichtung umgekehrt wie bei der Schließung desselben. Die verteilte Selbstinduktion und Kapazität der Induktor-Überspannungsspule sorgt dafür, daß nach jeder einzelnen Kondensatorentladung durch den Löschfunken erst eine gewisse Zeit vergeht, bis genügend Strom nachgeliefert wird, damit der Spannungsanstieg am Oszillator einen neuen Durchbruch herbeiführen kann. Das kann einige zehn Male sich wiederholen, bis

die Durchbruchsspannung immer unvollständiger überschritten wird und schließlich die Entladung aussetzt. Die dann folgende Pause ist für die Hochfrequenzerzeugung vollständig verloren. Bei Verwendung von Maschinenwechselstrom in Verbindung mit



Leuchtlänge und Induktorprimärstrom (schematisch)

Fig. 4 a



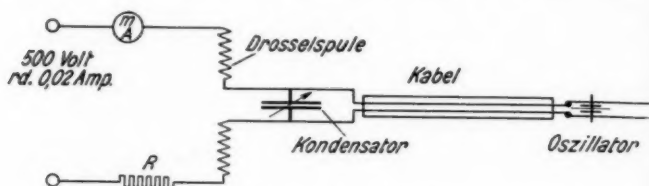
Induktorbetrieb des Oszillators

Fig. 4 b

einem Transformator liegen die Verhältnisse in dieser Beziehung schon günstiger. Die Unregelmäßigkeiten der Zeitabstände bleiben aber bestehen.

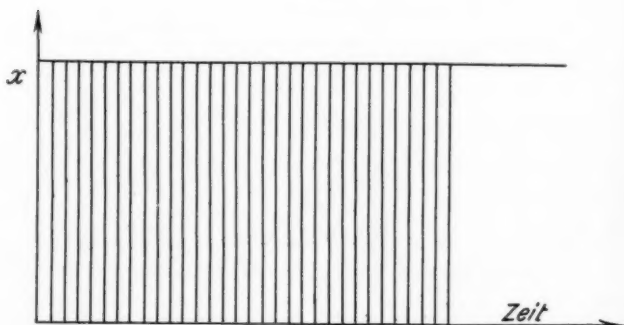
Diese Umstände legen den Gedanken nahe, einen Stoßfunkenoszillator mit Hilfe einer Gleichspannungsquelle zu erregen. Ein solcher Betrieb wurde bei einem Hertzschen Oszillator von I. Ganswindt (24) allerdings ohne Löschwirkung und bemerkenswerte Konstanz versucht. Er ist möglich, wenn durch eine Schaltung von Spulen und Kondensatoren für ein stoßweises Nachfließen des Stromes gesorgt wird (siehe das

allgemeine Schaltbild Fig. 5a). Die Frequenz dieser Entladungsstöße ist nicht nach der Thomsonschen Schwingungsgleichung $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ berechenbar. Trotzdem zeigt der Drehspiegel (Fig. 5b) die Leuchtröhrenbilder in gleichmäßigen Abständen, und zwar ohne jede Lücke, wenn die Funkenstrecke



Oszillatorbetrieb direkt aus einer Gleichspannungsquelle

Fig. 5a



Drehspiegelbild des Leuchtröhres bei direktem Gleichstrombetrieb

Fig. 5b

regelrecht arbeitet. Die Intensität am Galvanometer ist natürlich um so größer, je mehr Einzelentladungen in der Zeiteinheit vor sich gehen, wenn jeder von ihnen erregte Wellenzug die gleiche Maximalamplitude aufweist. In dieser Beziehung ist der Gleichstrombetrieb dem Induktorbetrieb wegen der bei letzterem auftretenden Entladungspausen bedeutend überlegen. Aber auch die Konstanz der Entladungsstöße läßt sich durch die Möglichkeit, direkt eine Hochspannungsbatterie verwenden zu können, nicht unwesentlich steigern. Die Schwankungen

des Unterbrechermotors beziehungsweise der Wechselstrommaschine fallen dabei ganz fort. Selbst ein erstklassiger „Rotax“ unterbricht bei strengerem Maßstabe nicht ganz gleichmäßig, jedenfalls nicht nach einigem Gebrauch.

M. Wien (19) sagt: „Mit Zischfunken sehr konstante Ausschläge zu erhalten ist bei Induktorbetrieb schwer“. Schmidt gibt ebenda an, daß die Schwankungen sich bei Verwendung von Wechselstrommaschinen leicht auf 1 Proz. herunterbringen lassen. Er empfiehlt übrigens statt Leuchtgas Wasserstoff mit der Begründung, daß Leuchtgas ruße. Bei beiden Autoren handelt es sich allerdings um längere Wellen. Verfasser hat sich selber von den Schwankungen des primären Integralstromes bei einem älteren mit Petroleum gefüllten und einem modernen mit Leuchtgasfüllung arbeitenden Quecksilberunterbrecher mehrfach überzeugt. Nur eine eigene Akkumulatornbatterie von ausreichender Kapazität kann dem abhelfen. Für direkten Gleichstrombetrieb des Oszillators genügt eine Stromstärke von 20 bis 30 mA bei etwa 300 bis 600 Volt Batteriespannung. Verfasser benutzte eine Batterie mit 3,5 Amp.-Std. Kapazität bei 10stündiger Entladung. Das ermöglichte einen Dauerbetrieb von wenigstens 150 Std. Für kurzzeitigen Betrieb ist sogar eine kleinere Batterie brauchbar, die (wie die heutzutage gängigen Anodenakkumulatoren) eine maximale Entladestromstärke von 50 mA bei 20stündiger Entladung ergeben. Das bedeutet etwa 40stündige Betriebsdauer.

5. Gasbeschickung und stoffliche Umsetzungen

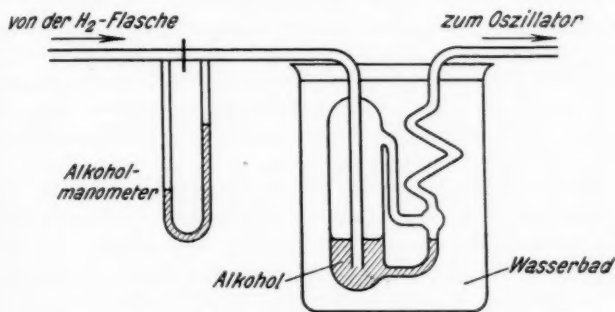
Die Schwankungen in der Hochfrequenzzerregung sind nunmehr allein von den Vorgängen im Oszillator abhängig. Beim Mieschen Oszillator mit Kupferelektroden und Leuchtgasbeschickung hat Verfasser die Konstanz erreicht, die von Früheren angegeben wurde. Dabei erwies sich aber die Qualität des Leuchtgases als zu stark veränderlich. Vor allem störte der Gehalt an Feuchtigkeit, die durch Phosphorsäureanhydrid beseitigt werden kann. Häufige Erneuerung der Trockensubstanz ist nicht zu umgehen. Bei den folgenden Beobachtungen benutzte Verfasser den neuen axialsymmetrischen Oszillator, der ein häufiges Auseinandernehmen und Zusammensetzen leicht gestattet. Bei Anwendung von Leuchtgas zeigen die Kupferelektroden ein grauschwarz gesprenkeltes Aussehen, bei Be-

schickung mit Wasserstoff ist ihre Oberfläche mattiert, metallisch rein. Allerdings ist die Erregung der Wellen nach den höheren Frequenzen hin stark beschränkt, also tatsächlich unbrauchbar. In gleichem Sinne äußert sich Rukop (15): „Wasserstoff gibt nicht den geringsten Ausschlag, es scheinen dabei also gar keine Schwingungen zustande zu kommen“, und weiter: „Die Anwesenheit von Benzol-, Alkohol-, Schwefelkohlenstoffdampf im Wasserstoff bringt einen ähnlichen Effekt hervor, wie man ihn mit Leuchtgas erhält; die Konstanz ist jedoch bedeutend geringer. Unbedingt erforderlich sind kohlehaltige Substanzen in der Funkenatmosphäre nicht, denn man bekommt auch mit der Luftfunkenstrecke Schwingungen, ihre Anwesenheit hat aber einen enormen Einfluß auf die Intensität“. Nach den Erfahrungen des Verfassers kommt wegen der ungleichen Beschaffenheit des Leuchtgases nur Alkoholdampf in Wasserstoff in Frage und zwar mit Kupferelektroden. Messing hat sich dabei als ganz ungeeignet erwiesen. Unter den Alkoholen zeigte sich Äthylalkohol am vorteilhaftesten. Silber als Elektrodenmaterial verhält sich im Anfang, solange die Oberfläche frisch ist, wenig anders als Kupfer. Später läßt die Stoßwirkung nach. Wie weiter unten erläutert wird, hängt diese mit chemischen Umsetzungen zusammen, und dabei kann Silber nicht ohne weiteres an die Stelle von Kupfer treten. Der Geruch der Abgase ist bei Kupfer und Silber auch verschieden. Der negative Erfolg Rukops mit Wasserstoff + Äthylalkohol ist nach eigenen Beobachtungen des Verfassers vielleicht folgendermaßen zu erklären: Entweder handelte es sich um Messingelektroden, oder der Äthylalkoholanteil war zu groß, oder die Gaszufuhr zu den Funkenflächen war für ein solches Gas-Dampfgemenge mit den dabei auftretenden chemischen Umsetzungen zu unregelmäßig.

Beim Oszillator des Verfassers strömt alles Gas durch die Funkenstrecke hindurch. Schon bei Vorversuchen erwiesen sich nicht alle Gasgeschwindigkeiten als brauchbar. Für die Umgrenzung der Betriebsbedingungen des neuen Oszillators wurden daher Einrichtungen (Fig. 6) notwendig, die eine bequeme Beobachtung der Gasgeschwindigkeit und bestimmte Einstellung der Gaszusammensetzung gestatten. Die Durchflußmenge des Wasserstoffs wurde dauernd durch eine Art Staudruckmesser beobachtet, der Grad der Alkoholbeimischung in

einer besonders gebauten Waschflasche durch deren Temperatur geregelt. Über eingehende Versuche und Eichungen dieser Meßgeräte wird an besonderer Stelle berichtet.

Versuche bei verschiedenen Sättigungstemperaturen ergaben brauchbare Stoßfunken zwischen 10 und 20° C. 0° ergab zu wenig, 30° zu viel Alkohol. Beim Durchgange durch den im Betrieb befindlichen Oszillator wird ein Teil des Alkoholdampfes chemisch umgesetzt, wie durch Ausfrieren in flüssiger Luft festgestellt wurde. Dabei wurden die Gewichtszunahmen einer



Staudruckmesser zur Beobachtung der Gasgeschwindigkeit
und Gefäß zur Sättigung mit Alkoholdampf

Fig. 6

hinter die Oszillatoranordnung geschalteten Kühlfälle miteinander verglichen, wobei einmal der Oszillator elektrisch in Betrieb war, das andere Mal nicht. Ob und wieviel Wasserstoff am Umsatz beteiligt war, hat Verfasser noch nicht geprüft. Bei kleinen Gasgeschwindigkeiten ist die verhältnismäßige Zersetzung vollkommener. Wie auch durch den Geruch des ausströmenden Gases bestätigt wird, liegt eine besondere chemische Wirkung zwischen den beteiligten Stoffen vor, die sich in der Weise äußert, daß in der Funkenstrecke bei den dort vorkommenden hohen Temperaturen flüchtige organische Kupferverbindungen sich bilden. Vermutlich wird dadurch die Entladungsstrecke entionisiert, das heißt die Löschwirkung erzielt.

Nach diesen Gesichtspunkten konnte Br. Glatzel (25) Löschwirkung sogar bei mehreren Millimetern Schlagweite erreichen, woraus er eine Reihe von Schlüssen allgemeinerer

Natur zieht, die jedoch zum Teil für die hier in Frage kommenden Wellenlängen sicher nicht zutreffen.

Es zeigt sich, daß auch die Geschwindigkeit des Gases im Funkenspalt zu regeltem Betrieb in gewissen Grenzen liegen muß. Maßgebend dafür sind die integrale Stromstärke im Oszillator und irgendwelche Diffusionsvorgänge in der Funkenkammer und der Gasableitung ins Freie. Das günstige sekundliche Gasvolumen lag etwa zwischen 0,5 und 1,5 ccm/sec⁻¹. Wie weiter unten näher erläutert wird, kann man in einem Fall der Gleichstromversorgung mit 25000 Durchbruchgruppen je Sekunde rechnen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß in diesem Falle erst nach 12 Durchbruchgruppen mit schätzungsweise insgesamt 150 Stoßfunken das Gas durch frisches ersetzt wird. In Wirklichkeit bildet sich ein Gleichgewichtszustand aus, der aber durch die heftigen Explosionen jedes einzelnen Durchbruchs immer stark deformiert wird.

Im Zusammenhang mit der Gasversorgung steht die Abnutzung der Funkenfläche. Das Kupfer wird bei regeltem Betriebe an allen Stellen gleichmäßig beansprucht, so daß örtlich Überhitzung und damit verbundene Lichtbogenbildung vermieden wird. Wenn nicht direkte Fehler in der Gasversorgung vorgekommen sind, bleiben die Funkenflächen metallisch rein. In der Gaskammer und der Nachbarschaft der Gasableitung sammelt sich ein erdiger Niederschlag, der kaum stört, wenn man ihn ab und zu entfernt. Nach vielleicht hundertstündigem Betriebe konnten 6 mg zwecks Untersuchung der Zusammensetzung gewonnen werden. Durch Verbrennung zu Kupferoxyd wurde ein Gehalt von etwa 50 Proz. Kupfer festgestellt. In welcher Form dieses chemisch gebunden war, konnte aus der kleinen Probe nicht gut bestimmt werden. Es ist aber anzunehmen, daß es sich um organische Verbindungen handelt.

Über die Ladungs- und Entladungsvorgänge am axialsymmetrischen Oszillator bei „Gleichstrombetrieb“

6. Die Erwärmung als Hindernis für eine einfache Entladungseinteilung

Der Leistungsfähigkeit eines jeden Energiewandlers ist eine Grenze durch die Verlustleistung der Wärme gesetzt. Je besser die Kühlung ist, um so höher liegt diese Grenze. Verfasser hat die Temperatur der Funkenstempel bei verschiedenen

Stromstärken beobachtet.¹ Ein Thermoelement (Kupfer-Konstantan 0,2 mm) wurde an einem der beiden Funkenstempel angebracht. Je größer die Spaltweite, desto höher die Über-temperatur, da die Spannung und damit die Leistung höher wird. In solchen Fällen wurden bis 230° C festgestellt. Bei normalem Betrieb (ohne Senderunterstützung, vgl. weiter unten) wurden an der heißeren Elektrode bei Oszillator-belastungen von 16 bis 24 mA Temperaturen von 131 bis 177° C beobachtet. Da die Durchbrüche zwischen den Elektroden eine Vorzugsrichtung haben, haben beide verschiedene Temperaturen. In diesem Zusammenhange sind die Arbeiten von Br. Glatzel (25) über die Elektrodentemperatur von Interesse. Bei seinen Beobachtungen handelt es sich unter anderem um 3 mm lange Funken und Wellen über 500 m. Er findet die Übertemperatur der Elektroden, die übrigens dieselbe Größenordnung wie die oben angegebene hat, für das Auftreten der Löschwirkung als erforderlich. Er beobachtet mit dem Eintreten guter Löschwirkung eine sprunghafte Steigerung der Temperatur der einen Elektrode. Es dürfte aber wohl eher die Höhe der Entladungsstromstärke die ursprüngliche Ursache für gute Löschwirkung gewesen sein, als die Temperatur der Elektroden. Beim Oszillator des Verfassers ist die Löschwirkung gleich nach dem Einschalten vorhanden. Die für kurze Wellen erforderliche hohe Entionisierungsgeschwindigkeit wird wohl auch durch chemische Bindung der Metallionen erreicht, und diese Reaktion geht um so heftiger vor sich, je höher die Temperatur innerhalb der Entladungsbahn durch die Stromlawine gesteigert wurde. Trotzdem sind die Elektroden gut zu kühlen. Aus ihnen darf nur so viel Metall verdampft werden, wie für die Entladung unbedingt notwendig ist, damit für die chemische Reaktion kein Überschuß davon vorhanden ist. Überhitzung läßt einen Lichtbogen entstehen, der die Funkenstrecke zerstört. Die durch die Erwärmung bedingte Leistungsgrenze liegt naturgemäß bei kleineren Oszillatoren für kürzere Wellen auch niedriger, da diese eine kleinere Wärmeabgabe nach außen hin besitzen.

Die elektrische Belastung der Entladungsstrecke wird also von zwei gegensätzlichen Forderungen beherrscht: einerseits soll der einzelne Stromstoß sehr groß sein, um eine kleine Entladungsspannung zu erzielen, andererseits darf dabei die Funken-

fläche nicht so hoch erhitzt werden, daß die Löschwirkung beeinträchtigt wird. Das erreicht man durch zweckmäßige Verteilung der Einzelentladungen über die ganze Funkenfläche und die Zeit. Ein einzelner Funke braucht nur einen kleinen Bruchteil der Funkenfläche zu seiner Ausbildung. Die Verteilung der Einzelfunken über die gesamte Fläche kann mit Hilfe mechanisch-akustischer Vorgänge im Entladungsspalt (Näheres vgl. weiter unten) besonders dann erleichtert werden, wenn die Funkenfolge genügend hoch ist. Die in Frage kommenden Frequenzen hätten aber in Verbindung mit der hohen Stromstärke des Einzelstoßes immer noch eine viel zu hohe Gesamtbelastung der Funkenstrecke zur Folge. Die weiter unten erklärte Schaltung bewirkt die Unterbrechung einer kürzeren Funkenreihe durch eine größere Pause. Die so entstehenden Wellenzuggruppen erscheinen im Drehspiegel als Einzelblinke des Leuchtrohres. Es ist zweifelhaft, ob man die Stoßfrequenz ohne Rücksicht auf die Knallwellenvorgänge im Spalt frei wählen darf und somit auf eine Unterbrechung durch Pausen verzichten kann. Die bloße Anwendung eines einwelligen Wechselstromes läßt das jedenfalls nicht zu, vielleicht die eines solchen besonderer Kurvenform.

7. Die normale Betriebsschaltung mit Kabel

Die Schaltung nach Fig. 5a ist die einfachste und zweckmäßigste für die Verwendung des Oszillators bei Messungen. Über eine Drosselspule wird ein Drehkondensator aufgeladen und dieser durch ein Kabel in den Oszillator entladen. Das Kabel ist durch eine Metallhülle abgeschützt und pflanzt die Oszillatorentladungen in seinem Innern mit etwa halber Lichtgeschwindigkeit fort. Die doppelte Laufzeit zusammen mit den Ladezeiten an den Kondensatoren bestimmen die Zeit zwischen zwei Funken. Die Pausen bestehen in der langsamen Aufladung des ganzen Systems über Widerstand und Selbstinduktion, nachdem die Funkendurchbrüche, die wegen der oszillatorischen Entladung des Drehkondensators reihenweise das Vorzeichen wechseln können, endlich aufgehört haben (Einzelheiten mit ihren experimentellen Unterlagen vgl. unter Abschnitt 8). Die Blinkfrequenz läßt sich durch Änderung des Widerstandes R und der Kondensatorkapazität beeinflussen. Eine dazugehörige Versuchsreihe ist in Tab. 1 zusammengestellt. Die Blinkfrequenz

wurde in der Weise roh bestimmt, daß mit Hilfe eines Röhrensenders ein kleines Geißlerrohr zum Leuchten erregt, und dieses gemeinsam mit dem Leuchtrohr am Oszillator im Drehspegel betrachtet wurde. Einige Abweichungen in Tab. 1 sind wohl auf Ungenauigkeiten dieses Verfahrens zurückzuführen. Die mittlere Gleichspannung an der Zuführung zum Kondensator wurde aus den Ohmschen Widerständen und dem beobachteten Gleichstrom berechnet. Beim Versuch, die Blinkfrequenz stetig zu vergrößern (durch Regelung von Widerstand und Kapazität), zeigte sich eine Neigung des Stromes zu sprunghafter Änderung an einer Stelle, wo auch die Kapazität stark geändert werden

Tabelle 1
(Kabelschaltung Fig. 5a)

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. | IX. | X. | XI. | XII. |
|-----|-------|------|------|------|------------------|------------------|-------|-----|---------------|---------------|------|
| Nr. | μ | kHz. | mA | kOhm | $\mu\mu\text{F}$ | $\mu\mu\text{F}$ | Volt | mm | μC | μC | |
| 1 | 37 | 25 | 44,2 | 19,3 | 1580 | 2155 | 231 | 96 | 1,72 | 0,51 | 3,37 |
| 2 | 37 | 25 | 42,4 | 20,0 | 1800 | 2375 | 204 | 86 | 1,70 | 0,48 | 3,54 |
| 3 | 37 | 25 | 39,5 | 18,7 | 1700 | 2275 | 208 | 86 | 1,58 | 0,47 | 3,37 |
| 4 | 37 | 25 | 38,2 | 17,6 | 1580 | 2155 | 225 | 100 | 1,54 | 0,48 | 3,21 |
| 12 | 37 | 25 | 38,0 | 17,7 | 1610 | 2185 | 221 | 105 | 1,52 | 0,48 | 3,17 |
| 6 | 37 | 28 | 41,9 | 11,0 | 1520 | 2095 | 213 | 90 | 1,50 | 0,45 | 3,33 |
| 7 | 37 | 29 | 37,6 | 12,5 | 1520 | 2095 | 219 | 88 | 1,30 | 0,46 | 2,83 |
| 8 | 37 | 34 | 15,5 | 22,3 | 570 | 1145 | 385 | 100 | 0,46 | 0,44 | 1,04 |
| 9 | 37 | 35 | 15,9 | 22,5 | 510 | 1085 | 372 | 100 | 0,45 | 0,40 | 1,12 |
| 10 | 37 | 38 | 17,7 | 20,0 | 510 | 1085 | 374 | 100 | 0,47 | 0,41 | 1,14 |
| 13 | 35 | 28 | 48,0 | 9,1 | 1610 | 2185 | 214 | 105 | 1,71 | 0,47 | 3,64 |
| 14 | 35 | 31 | 47,6 | 9,1 | 1500 | 2075 | 218 | 94 | 1,53 | 0,45 | 3,30 |
| 11 | 35 | 46 | 23,3 | 14,4 | 640 | 1215 | 381 | 100 | 0,51 | 0,46 | 1,11 |
| 15 | 38 | 38 | 17,2 | 20,4 | 560 | 1135 | 376 | 105 | 0,45 | 0,43 | 1,05 |
| 16 | 39 | 47 | 23,0 | 16,7 | 340 | 915 | 334 | 92 | 0,49 | 0,31 | 1,58 |

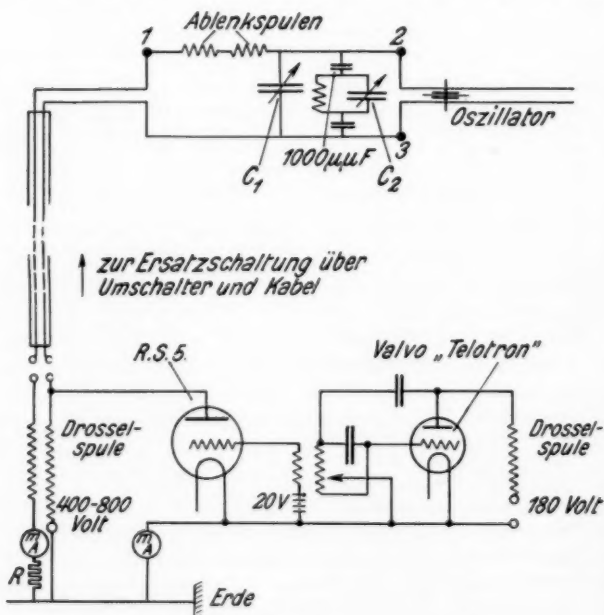
Erklärung der Kolonnen:

- I. Laufende Versuchsnummer.
- II. Abstand der Funkenflächen (Funkenstrecke).
- III. Roh bestimmte Blinkfrequenz.
- IV. Oszillatorgleichstrom.
- V. Gesamter Gleichstromwiderstand.
- VI. Reflektierende Kapazität.
- VII. Gesamte Kapazität (einschließlich Kabel und Oszillator).
- VIII. Berechnete mittlere Gleichspannung am Kabel.
- IX. Leuchtlänge x (vgl. Fig. 5b).
- X. Durchgelassene Elektrizitätsmenge je Blink (mA/kHertz).
- XI. Statische Aufladung der Gesamtkapazität bei mittlerer Gleichspannung ($\mu\text{F}\cdot\text{Volt}$).
- XII. Verhältnis: X./XI.

mußte, um einen ruhigen Betrieb zu ermöglichen. Sehr anschaulich werden die beiden Seiten dieser Unstetigkeitsstelle, wenn man die Kolonne XII betrachtet. Die Entstehung der Zahlenwerte ist aus Tab. 1 zu ersehen. Es hat den Anschein, als ob es sich um zwei verschiedene Formen der Entladungsgruppe handelt. Bezüglich der Kurzwellenerzeugung steht die Entladung mit kleinerer Stromstärke weder der Maximalamplitude (Leuchtlänge x) noch der integralen Intensität nach gegen den Betrieb bei hoher Stromstärke zurück.

8. Der Spannungsverlauf am Oszillator während der Aufladungszeit

Die folgenden Untersuchungen wurden mit Hilfe einer Schaltung nach Fig. 7 (obere Hälfte) angestellt, die man als Ersatzschaltung für Fig. 5a auffassen kann. An die Stelle



Ersatzschaltung und Röhrengenerator

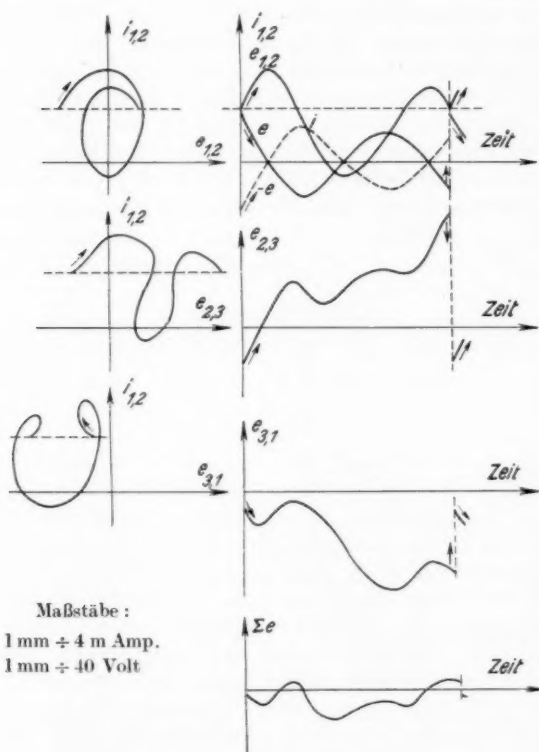
Fig. 7

des Kabels ist ein Schwingungskreis mit Selbstinduktion und Kapazität getreten. So konnten mittels eines Kathodenstrahl-oszillographen mit Blinkfrequenz sich wiederholende zyklische Oszillogramme beobachtet werden, wobei die Ablenkung in der einen Richtung durch Kondensatorplatten, in der andern durch (eisenfreie) Magnetspulen hervorgerufen wurde. Kennt man eine von beiden Ablenkungsfunktionen in ihrem zeitlichen Verlauf, so ergibt sich aus dem Oszillogramm die andere. Eine sinusförmige Vergleichsspannung läßt sich nicht verwenden, da die geringsten Unregelmäßigkeiten bei der Oszillatorblinkfrequenz über eine große Zahl von Strahlumläufen das Bild verwaschen. Man geht daher am einfachsten von Strom und Spannung einer Spule aus, für die der bekannte Zusammenhang

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

im fraglichen Frequenzgebiet genügend genau gelten muß. Das Abwickeln des entstandenen Oszillogrammes (Fig. 8) geschieht dann in einfacher Weise graphisch (26). Es wurden immer drei Kombinationen aufgenommen, so daß an der Summe der Spannungen über einen geschlossenen Kreis, die in jedem Augenblick = 0 sein muß, die Genauigkeit des Verfahrens abgeschätzt werden kann. Beim Aufsuchen regulärer Betriebszustände war die Beobachtung solcher Oszillogramme sehr dienlich, da bereits in ziemlich weitem Umkreis das endgültige Bild, zunächst allerdings stark verschwommen bzw. flatterhaft auftaucht, um dann ständig deutlicher in Erscheinung zu treten. Trotzdem bleibt eine Art Hof zurück, der von den immer noch vorhandenen Ausreißern unter den Entladungen herrührt. Diese letzten Störungen zu beseitigen, d. h. eine genau äquidistante Blinkfolge zu erreichen, verwandte Verfasser einen fremdgesteuerten Röhrensender mit Blinkfrequenz (20 bis 45 Kilohertz) nach Schaltung Fig. 7 (untere Hälfte). Es ist aber zu beachten, daß durch den Sender nicht eine beliebige Blinkfrequenz eigenmächtig erzwungen, sondern die durch den Oszillator in seiner Schaltung vorgeschriebene Blinkfrequenz nur unterstützt wurde. Bei anderer Frequenz entstehen Schwebungen mit Tonfrequenz (vgl. dazu Fig. 10), die als solche an den vom Oszillator ausgehenden Pfeiftönen leicht zu erkennen sind. Das Geräusch verschwindet nahezu, wenn der

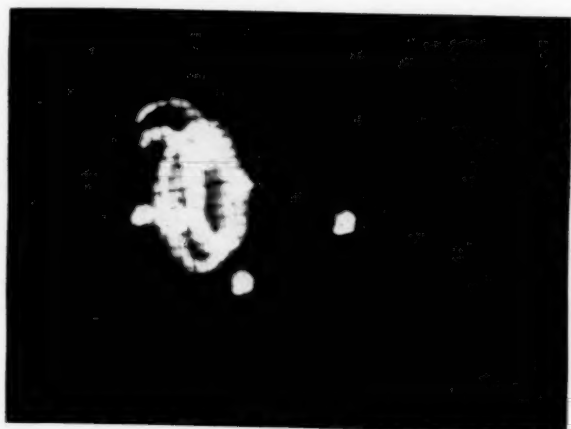
Oszillator gleichmäßig arbeitet, da es sich dann um Töne handelt, die oberhalb der Hörgrenze liegen. Im Augenblick des Eintrittkommens ist auch eine plötzliche Steigerung der integralen



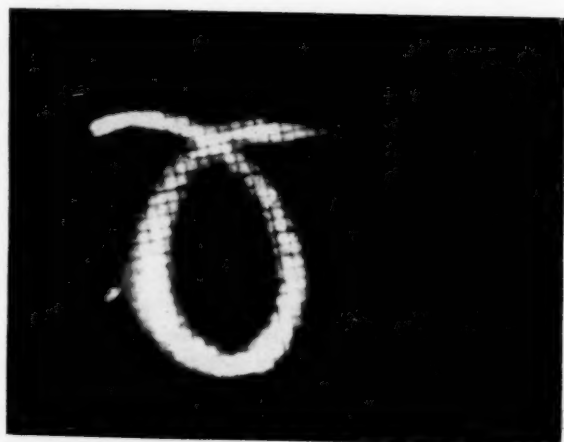
Abwicklung zyklischer Oszillogramme
Blinkfrequenz ohne Röhrensenderunterstützung

Fig. 8

Gleichstromstärke zu beobachten. Sind alle Teile der Schaltung besonders gut abgeglichen, so läßt sich der Senderwechselstrom (durch Abschalten der Vorröhre) zu- und abschalten, ohne merk-



Ordinate: $e_{1,2}$
Abszisse: $i_{1,2}$
Fig. 10



Ordinate: $e_{2,3}$
Abszisse: $i_{1,2}$
Fig. 9

liche Änderungen im Oszillatorkreise hervorzurufen, abgesehen von der Vermeidung der letzten Unregelmäßigkeiten der Blinkfrequenz im Drehspeigelbild und einer letzten Erhöhung der Bildschärfe auf dem Leuchtschirm. Auf diese Weise ist eine Sammlung von Betriebszuständen entstanden, die in Tab. 2 wiedergegeben ist. Einige Oszillogramme wurden durch Photo-

Tabelle 2
(Ersatzschaltung Fig. 7)

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. | IX. | X. | XI. |
|-----|-------|------|------|------|------------|------------|-------|------|---------|-----------------------------|
| Nr. | μ | kHz. | mA | kOhm | $\mu\mu F$ | $\mu\mu F$ | Volt | Volt | μC | Bemerkung |
| 13 | 12 | 33,0 | 26,6 | 22,9 | 140 | 550 | 730 | 122 | 0,81 | Fig. 11 |
| 9 | 14 | 32,7 | 26,0 | 16,0 | 720 | 35 | 580 | 164 | 0,80 | |
| 3 | 33 | 24,5 | 30,0 | 10,3 | 300 | 940 | 580 | 271 | 0,87 | |
| 10 | 37 | 29,6 | 15,4 | 22,9 | 210 | 500 | 580 | 228 | 0,52 | Fig. 9 ger. Intens. |
| 8 | 38 | 28,7 | 27,7 | 15,9 | 560 | 430 | 580 | 139 | 0,96 | |
| 7 | 40 | 28,1 | 28,6 | 12,5 | 550 | 940 | 580 | 222 | 1,01 | |
| 2 | 47 | 24,5 | 29,0 | 11,0 | 140 | 940 | 580 | 261 | 1,18 | |
| 11 | 54 | 25,0 | 22,0 | 7,0 | 1220 | 440 | 580 | 378 | 0,88 | |
| 6 | 55 | 24,5 | 20,6 | 12,4 | 1180 | 940 | 580 | 325 | 0,84 | Interferenz dazu Fig. 10 |
| 4 | 58 | 24,5 | 13,6 | 17,3 | 1120 | 940 | 580 | 345 | 0,55 | |
| 5 | 66 | 24,5 | 20,4 | 12,6 | 1240 | 940 | 580 | 322 | 0,83 | Fig. 13 ¹⁾ 2) |
| 14 | 42 | 32,9 | 26,6 | 23,2 | 170 | 720 | 730 | 114 | 1,81 | |
| 12 | 42 | 26,9 | 28,6 | 12,2 | 300 | 280 | 730 | 380 | 1,06 | |

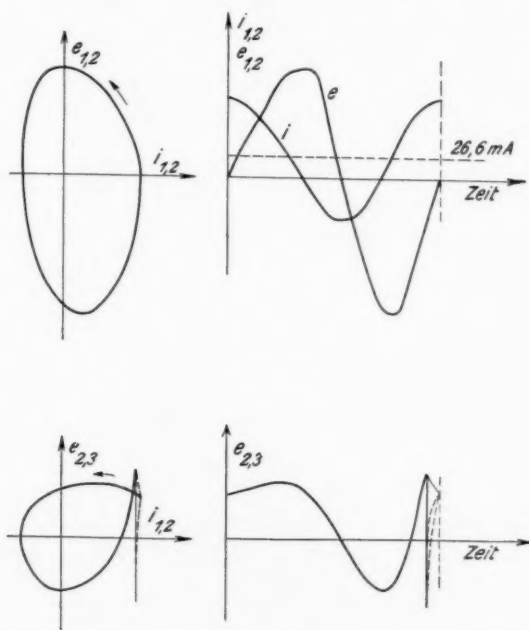
Erklärung der Kolonnen:

- I. Laufende Versuchsnummer (6 verschiedene Versuchstage).
- II. Abstand der Funkenstrecke (Funkenstrecke).
- III. Blinkfrequenz = Röhre senderfrequenz.
- IV. Oszillatorgleichstrom.
- V. Gesamter Gleichstromwiderstand.
- VI. Kondensator C_1 (Ersatzschaltung, Fig. 7).
- VII. Kondensator C_2 .
- VIII. Batteriespannung.
- IX. Berechnete mittlere Gleichspannung am Kabel.
- X. Durchgelassene Elektrizitätsmenge je Blink (III./IV.).
- XI. Bemerkungen: Das Leuchtröhrenbild zeigt meist gute Intensität und reine Frequenz. Ausnahmen werden angegeben. Gasgeschwindigkeit betrug 0,3 – 1,0 ccm/sec bei Alkoholttemperaturen von 10–20° C.

1) In die Oszillatorzuleitung ist eine Spule von 10 Windungen eingeschaltet.

2) Vom normalen abweichendes Oszillogramm mit mehrfacher Verschlingung (normales Oszillogramm vgl. Fig. 9).

graphie des Leuchtschirmbildes festgehalten und sind als Figg. 9 und 10 zu finden ($\frac{1}{50}$ Sek.; Andresaplatte). Zu zwei weiteren wurde eine graphische Abwicklung in Fig. 11 durchgeführt. Sie weisen im Grunde dieselbe Charakteristik auf, wie die ohne Sender erhaltenen. Während einer Blinkperiode steigt danach



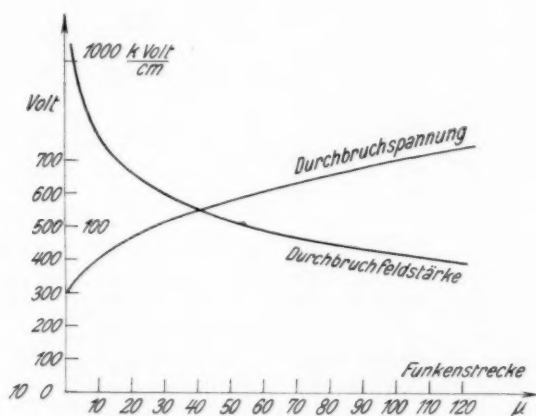
Maßstäbe: Strom 1 mm \div 8 mA, Spannung 1 mm \div 50 Volt,
Zeit 1 mm \div $0,94 \cdot 10^{-6}$ sec

Abwicklung der Oszillogramme

Fig. 11

die Spannung an der Oszillatorzuleitung bis zum Durchbruchswert steil an, um nach dessen Vollendung vorübergehend sogar negativ zu werden und über Null hinweg bis zum nächsten Durchbruch steil anzusteigen. Die Zeit des Durchbruchs ist in diesen Oszillogrammen auf einem so schmalen Streifen beschrieben, daß sich darüber nicht viel aussagen läßt. Jeden-

falls bewegt sich die Spannung mit viel höherer Frequenz in dem Raum zwischen zwei Dämpfungskurven, wie in Fig. 11 angedeutet. Auch außerhalb der Durchbruchzeit nimmt sie vorübergehend erhebliche Werte an. Ein Vergleich mit der statischen Durchbruchsspannung für $12\ \mu$ Spaltweite zeigt, daß sowohl positiv wie negativ der betreffende Wert von 420 Volt an der Oszillatorzuleitung gerade noch nicht erreicht wird. Die Abhängigkeit der statischen Durchbruchsspannung von der Spaltweite wurde für das gewöhnlich verwandte Gasgemisch besonders bestimmt und ist in Fig. 12 wiedergegeben. Zur



Statische Durchbruchspannung und Feldstärke

Fig. 12

Vermeidung von Schaltüberspannungen wurde für verschiedene Batteriespannungen der Durchschlag durch langsames Annähern der Elektroden herbeigeführt.

9. Die Vorgänge während der Entladungszeit

Ob und in welcher Weise an den ersten Durchbruch sich noch weitere während eines Blinkes anschließen, ist aus obigen Oszillogrammen nicht zu entnehmen. Immerhin läßt sich folgende Überschlagsrechnung über die Elektrizitätsmengen an-

stellen: Die als Gleichstrom gemessene Elektrizitätsmenge ist der durch den Oszillator gegangenen gleich zu setzen,

$$i \cdot d t = i \cdot 1 = q \cdot n$$

mit

$$q = \frac{i}{n}$$

als Elektrizitätsmenge für einen Blink, wenn n Blinke je Sekunde erfolgen. Wievielmals kann man mit dieser Elektrizitätsmenge den Oszillator auf eine Durchbruchsspannung E aufladen?

$$y \cdot E \cdot c_{\text{Osz.}} = q, \quad y = \frac{q}{E \cdot c_{\text{Osz.}}}$$

Die Entladung erfolgt im Verhältnis zur Aufladung in so kurzer Zeit, daß man den Oszillator währenddessen von der Stromquelle als abgeschaltet betrachten darf. Als Zahlenbeispiel wählen wir den Fall

$$i = 28,6 \text{ mA}, \quad n = 28,1 \text{ Kilohertz}, \quad E = 650 \text{ V},$$

$$c_{\text{Osz.}} = 175 \mu\text{F},$$

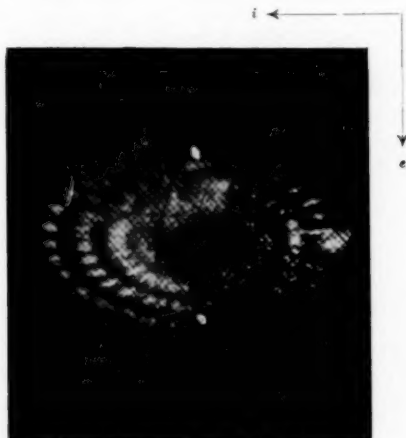
$$y = \frac{28,6 \cdot 10^{-3}}{650 \cdot 175 \cdot 10^{-12} \cdot 28,1 \cdot 10^3} = 9.$$

Danach kann man mindestens 9 Aufladungen je Blink annehmen. Wenn man einen Ladestrom mit wechselnder Richtung als möglich erachtet, muß jedenfalls in der Gleichstromrichtung ein Überschuß von 9 Aufladungen bleiben.

Um diesen *Ladestrom* näher zu untersuchen, schaltete Verfasser zwischen Kondensator und Oszillator eine Spule aus Kupferdraht von 2mal 7 Windungen, um den Kathodenstrahl der Braunschen Röhre in der einen Richtung durch deren Magnetfeld, in der anderen Richtung durch die Spannung an ihren Enden abzulenken. Das Ergebnis war das Oszillogramm Fig. 13, das in seiner Verworrenheit einer Deutung zunächst trotzte (zur Vermeidung der Überstrahlung ist die Bildmitte optisch ausgeblendet). Die starke Zackenbildung konnte aber als Eigenschwingung der Spule erkannt werden, und trat bei einem zweiten Spulenpaar von 2mal 7 Windungen aus dünnem Widerstandsdraht nur noch schwach hervor (Fig. 14). Unter Berücksichtigung eines besonderen Oszillogrammes, wo statt der Spannung an den Spulenden die an der Oszillatorzuleitung

gesetzt war, wurde der Zusammenhang der einzelnen Bildteile geklärt und das Ganze zeichnerisch abgewickelt (Fig. 15). Dabei kann der Vorgang nicht mehr als stationär behandelt werden; das Magnetfeld der Spule resultiert aus den Einzelfeldern jedes Windungselementes, da diese alle verschiedene Ströme führen. Glücklicherweise kennt man aber den Parameter der Zeit, die äquidistanten Eigenschwingungen der Spule, die mit Hilfe

Kathodenstrahloszillogramm



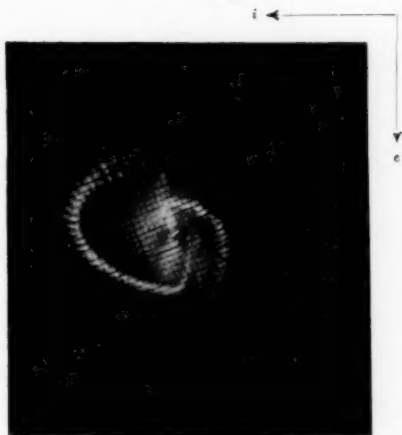
Zwei Kupferdrahtspulen von je 5 Windungen („Korbodenwicklung“)
Spannungsamplitude: ± 1200 Volt, Stromamplitude: ± 10 Amp.

Fig. 13

eines Lechersehen Paralleldrahtsystems gemessen werden konnten. Die Verwendung von Widerstandsdraht bewirkte auch eine Dämpfung der — der Spulenschwingung unterlagerten — Thomsonschen Schwingung von Spule und Kondensator durch den Oszillator hindurch. Dieser wirkt durch die häufige Aufladung seiner Kapazität und darauffolgende Entladung wie ein Kurzschluß für diesen Kreis, und läßt das Oszillogramm der Spule im wesentlichen unbeeinflußt. Es ist eine Spirale, die bei jedem Stromrichtungswechsel dadurch mit

Eigenschwingungen der Spule überlagert wird, daß der Kurzschluß (zunächst plötzlich, nach der ersten Stromumkehr und späteren erst mit einer Verzögerung, nämlich der Aufladungszeit des Oszillators im betreffenden Sinne) einsetzt. Danach ist der Zusammenhang zwischen den Oszillogrammen der Kupfer- und der Manganinspule geklärt: sie unterscheiden sich nur durch den Grad der Dämpfung von Haupt- und Spulen-

Kathodenstrahloszillogramm



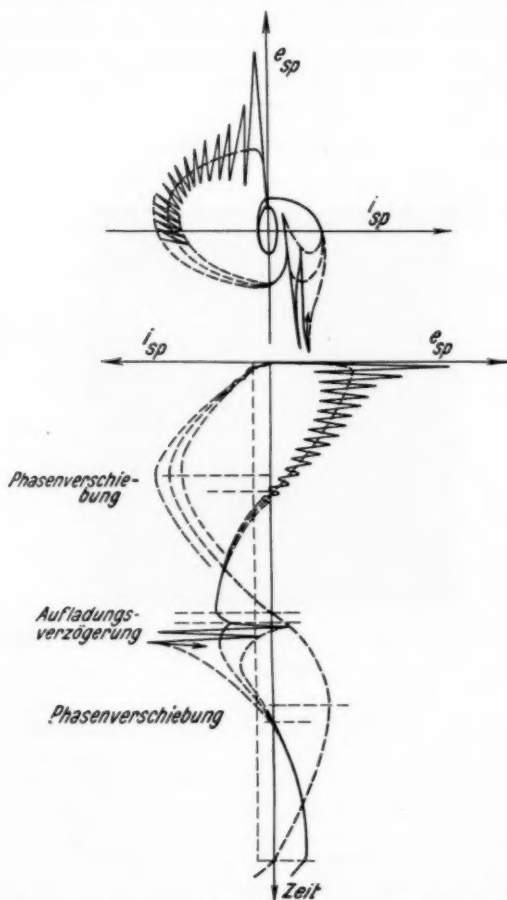
Zwei Widerstandsdrahtspulen von je 7 Windungen („Zylinderspule“)¹⁾

Fig. 14

schwingung. Bei der Kupferspule erfolgt ein häufigerer Wechsel der Durchbruchstromrichtung als bei der Manganinspule. Die Anzahl der Durchbrüche in beiden Richtungen ergibt sich erst indirekt durch Berechnung der Zahl der Aufladungen des Oszillators. Durch den Stromdurchgang in einer Hauptrichtung wird die eine Elektrode wärmer als die andere, die Durchbruchsspannung ist daher bei Stromumkehr verschieden. Da die Stromstärke an der Oszillatorzuleitung sich ständig

1) Das Oszillogramm wird mit Blinkfrequenz wiederholt, aber nur während des kurzen Entladungsabschnittes durchlaufen.

ändert, dürften in diesem Falle (Hilfsschaltung Fig. 7) die Aufladungszeiten verschieden sein. Jedenfalls ist zu bedenken, daß die Stromkurve des Oszillogrammes das Integral über die ganze



Maßstäbe: Strom 1 mm \div 0,29 Amp., Spannung 1 mm \div 58 Volt,
Zeit 1 mm \div $10,2 \cdot 10^{-9}$ sec

Graphische Abwicklung zu Fig. 14

Fig. 15

Spule darstellt, für die Aufladung des Oszillators aber nur der Strom in Frage kommt, der aus dem einen Spuleneinde in den Oszillator übertritt.

Auf Grund dieser allgemeinen Erörterung ergeben sich für das Oszillogramm Fig. 14 bzw. 15 die folgenden rechnerischen Zusammenhänge:

Wir gehen von der Eigenschwingung der Spule aus, deren Wellenlänge in Luft am Lecherschen Paralleldrahtsystem durch häufige Messungen zu $\lambda = 447$ cm bestimmt wurde. Eine exakte Berechnung nach Lenz (27) ist für die verwandte Spule nicht ohne weiteres möglich, da sie durch einen gewissen Zwischenraum in zwei Teile geteilt ist, um ihr Magnetfeld auf den Kathodenstrahl symmetrisch einwirken zu lassen. Die für die Einzelspule errechnete Eigenwelle wird durch die gegenseitige Beeinflussung geändert. Die Theorie ergibt in erster Annäherung als Hauptwellenlänge der Einzelspule die doppelte Drahtlänge, was dem gefundenen Meßwert etwa entspricht.

Mit dem so gewonnenen Zeitmaßstab wird die Wellenlänge der Thomsonschen Kondensatorschwingung während des Durchbruchs: $\lambda = 225$ m, dazu $\omega = 8,38 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$. Mit einer Selbstinduktion von $8,5 \cdot 10^{-6}$ Henry für eine der beiden Spulen wird die Selbstinduktion des Spulensystems rund:

$$L = 20 \cdot 10^{-6} \text{ Henry}.$$

Ihr Wechselstromwiderstand für genannte Kreisfrequenzen ist:

$$W = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{25^2 + 168^2} = 170 \text{ Ohm}.$$

Das Schaubild des Strom- und Spannungsverlaufes ohne die Eigenschwingungen der Spule läßt einen Wert von 174 Ohm entnehmen.

Nach Aufhören der Durchbrüche (hier bereits nach einer Periode der genannten Frequenz) schwingt das System Spule-Drehkondensator-Oszillatorkondensator mit höherer Frequenz weiter, wie mit Resonanzkreisen festgestellt werden kann. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung der Spule soll bekanntlich betragen:

$$\text{tg } \varphi = \frac{R}{\omega L} = \frac{25}{168} = 0,149, \quad \text{danach: } = 8,5^\circ.$$

Das Schaubild ergibt:

$$\frac{90 \cdot 5}{42} = 10,7^{\circ}.$$

Die Kapazität der Ablenkplatten beträgt höchstens $2 \mu\text{F}$ und ist bei den eben ausgeführten Rechnungen praktisch bedeutungslos.

Die während eines Oszillogrammumlaufes in der Hauptrichtung durch den Oszillator tretende Elektrizitätsmenge beträgt nach dem gezeichneten Stromverlauf:

$$0,7 \text{ (Amp.)} \times 755 \cdot 10^{-9} \text{ (sec.)} = 0,53 \cdot 10^{-6} \text{ Coulomb.}$$

Dem entspricht bei einer Blinkfrequenz von $24,3 \cdot 10^3$ Hertz, also ebensoviel Umläufen je Sekunde eine mittlere Gleichstromstärke von 0,013 Amp. beim Versuch.

10. Über Vorgänge im Innern der Entladungsstrecke

Die experimentellen Ergebnisse des vorigen Abschnittes gestatten nur beschränkte Aussagen über den Einzelstoß, und zwar durch angenäherte Rechnung. Diese Vorgänge spielen sich in der kurzen Zeit weniger Meter Lichtweg ab, so daß mit Apparaten von Abmessungen, wie sie die Braunsche Röhre mit Spulen und Kondensatoren hatte, keine eindeutige Wiedergabe zu erwarten ist. Auf diesem Wege kommt man nicht näher an die Funkenstrecke heran. Die auf deren Oberfläche entdeckten Narbenzeichnungen jedoch, die weiter oben schon erwähnt wurden, bieten eine Möglichkeit, die Beobachtung auf das Innere des Oszillators auszudehnen. Als Figg. 16 bis 23 sind die Mikrophotographien einer Funkenfläche nach verschiedenartigem Betrieb wiedergegeben. Die Beleuchtung war seitlich angeordnet, und alle Unterschiede von Hell und Dunkel stammen nur von der verschiedenen Mattierung der Kupferoberfläche durch die Funken her. Es sind also keine Oxyd- oder andere Schichten an der Zeichnung beteiligt; unter geeignetem Winkel betrachtet erscheinen die Funkenflächen metallisch rein.

Fig. 16: In Hilfsschaltung (Fig. 7) nach vielstündigem Betrieb. Halbkugelige Vertiefungen stören die Funkenbildung bis zur Unbrauchbarkeit.

Fig. 17: Nach kurzem, gestörtem Betrieb hinter 3,4 m Panzerkabel in Normalschaltung (Fig. 5a).

Fig. 18: Nach kurzem, gutem Betriebe unter besonderen Bedingungen; Funkenflächen stehen aber nicht richtig parallel.

Fig. 19: Nach gutem Betriebe hinter 3,4 m Panzerkabel mit 6 Windungen (10 cm Durchmesser) vor dem Oszillator; 40 mA Gleichstrom.

Fig. 20: Dgl., aber nur 25,3 mA. Funkenstrecke 36 μ .

Fig. 21: Nach mindestens 5 Minuten guten Betriebes hinter 3,4 m Panzerkabel.

Fig. 22: Nach gutem Betriebe hinter 7,6 m Panzerkabel.

Fig. 23: Nach gutem Betriebe hinter 9 m Panzerkabel.

Die gleichmäßige Narbenbildung wurde zum ersten Male bei Induktorbetrieb des Oszillators nach Fig. 4b beobachtet, ein Beweis dafür, daß sie mit der Blinkfrequenz nicht zusammenhängt. Damals wurde aber ein Panzerkabel als Zuleitung zum Oszillator verwandt, und erst die Einschaltung eines solchen zwischen Drehkondensator und Oszillator brachte solche Zeichnung wieder hervor. In der Ersatzschaltung wurde sie nie so ausgeprägt erhalten.

An sich ist bei der Symmetrie des Senders und der Funkenstrecke nicht einzusehen, wodurch einzelne Punkte der Funkenfläche vor benachbarten ausgezeichnet sein sollten. Erst Veränderungen, die durch einen Durchbruch in der Gasschicht zwischen den Funkenflächen veranlaßt werden, mögen in dieser Hinsicht sich auswirken. Jedenfalls geht vom Funken eine Knallwelle aus, die an den Berandungen der plattenförmig ausgedehnten Gasschicht zwischen den Funkenflächen reflektiert wird. Gleichzeitig geht vom Oszillator eine elektrische Wanderwelle in das Kabel und wird vom Kondensator reflektiert. Die zurückkehrende Wanderwelle bewirkt den nächsten Durchbruch an einer Stelle geringerer elektrischer Festigkeit, wie sie durch die Unterdruckwelle gegeben ist, die der Überdruckwelle auf dem Fuße folgt. Bei geeigneter Laufzeit der Wanderwelle im Vergleich zur Knallwelle entsteht durch eine größere Anzahl aufeinanderfolgender Durchbrüche eine Art akustische Resonanz mit stehenden Wellen, die bewirken, daß jede folgende Durchbruchsstelle zur vorangehenden in bestimmtem Abstände steht. Das Auftreten so scharf abgegrenzter Punkte, wie sie auf Fig. 22 zu sehen sind, ist natürlich nur durch besonders reine Resonanz möglich, wo die reflektierten Knallwellen durch

ihre Überschneidung mit den noch nicht reflektierten immer die gleichen Stellen für den Durchschlag geeignet machen. Diese Anschauung erklärt auch die meist zu beobachtende ringförmige Gruppierung der Narben durch Symmetriegründe.

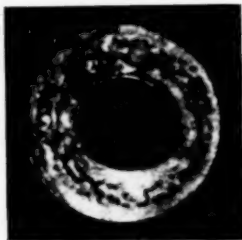
Mikrophographien der Funkenflächen (Narbenzeichnung)

Maßstab 7 : 1 (außer Fig. 16)



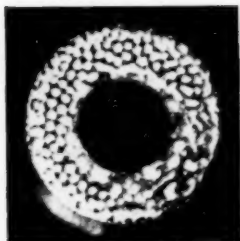
Maßstab 8 : 1. Hilfsschaltung

Fig. 16



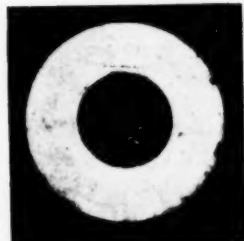
3,4 m Kabel. Störung

Fig. 17



Kabel mit Spule

Fig. 18



3,4 m Kabel und 6 Windungen

Fig. 19

Das *Fehlen* der Erscheinung bei Versuchen mit der Hilfsschaltung würde bedeuten, daß dabei die Durchschläge während einer Blinkperiode *nicht* in *gleichen* Abständen erfolgen. Damit ist aber nicht in Abrede gestellt, daß auch dort die Knallwellen für eine Verteilung direkt aufeinanderfolgender Einzelentladungen über die ganze Funkenfläche sorgen. Nach dem Oszillogramm Fig. 15 verläuft der Ladestrom vom Drehkondensator zum Oszillator durch die Spule hindurch im wesentlichen nach

einer gedämpften Sinuswelle. Wieviel die oben an betreffender Stelle angedeutete Verzeichnung (durch die Eigenschwingung der Spule) daran ändern kann, ist ohne weiteres nicht zu sagen. Eben das Fehlen der Narben in besprochenem Sinne scheint

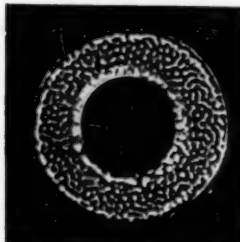
Mikrophotographien der Funkenflächen (Narbenzeichnung)

Maßstab 7 : 1



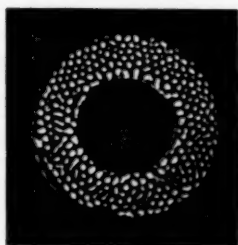
3,4 m Kabel und 6 Windungen

Fig. 20



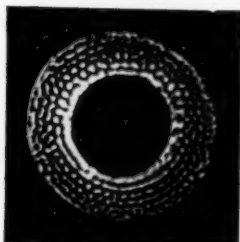
3,4 m Kabel direkt

Fig. 21



7,6 m Kabel

Fig. 22



9,0 m Kabel

Fig. 23

gleiche Zeitabstände der Entladungen zu verneinen; allerdings ist der Zeitmaßstab auch ein anderer.

Ein Vergleich der Figg. 20 bis 23 gibt zunächst qualitativ eine Bestätigung der oben entwickelten Anschauung: Größeren Laufzeiten der Wanderwellen ebenso wie Ladeverzögerungen durch vorgeschaltete Spulen entsprechen immer auch größere Narbenabstände. Zahlenmäßig zeigen die Versuchswerte folgendes: Als Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Knallwellen

kann man (zumal in einem derartig engen Spalt) nicht die Schallgeschwindigkeit erwarten, wie sie an dem verwandten Gasgemisch in weiten Röhren nach der Kundtschen Methode zu 780 m/sec gemessen und für den freien Raum zu 788 m/sec berechnet wurde. Die Knallwellen im freien Raum pflanzen sich besonders in nächster Nähe des Funkens mit bedeutend höherer Geschwindigkeit fort, wie bereits durch E. Mach und seine Mitarbeiter (27, 28) gezeigt worden ist. Die Laufzeit des elektrischen Wanderwellenkopfes (die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchschlägen ist sicher größer) ist bekanntlich aus den Kabelabmessungen zu berechnen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in Kabeln ist abhängig von der Dielektrizitätskonstanten und beträgt für die verwendete Bauart erfahrungsgemäß etwa halbe Lichtgeschwindigkeit. Im folgenden sind die Versuchswerte für zwei Narbenbilder nebeneinander gestellt, für die durch zahlreiche Abstandsmessungen benachbarter Narben ein mittlerer Narbenabstand bestimmt wurde.

| | | Fig. 21 | Fig. 22 |
|---|-------|----------------------|----------------------|
| Kabellänge | m | 3,4 | 7,6 |
| Doppelte Laufzeit | sec | $4,5 \cdot 10^{-8}$ | $10,1 \cdot 10^{-8}$ |
| Mittlerer Narbenabstand | mm | 0,15 | 0,20 |
| Angenommene Ladeverzögerung | sec | $16 \cdot 10^{-8}$ | $16 \cdot 10^{-8}$ |
| Maximumzeit zwischen zwei Durchschlägen | sec | $20,5 \cdot 10^{-8}$ | $26,1 \cdot 10^{-8}$ |
| Knallgeschwindigkeit: Minimum | m/sec | 770 | 770 |
| Knallgeschwindigkeit: Maximum | m/sec | 3300 | 1980 |

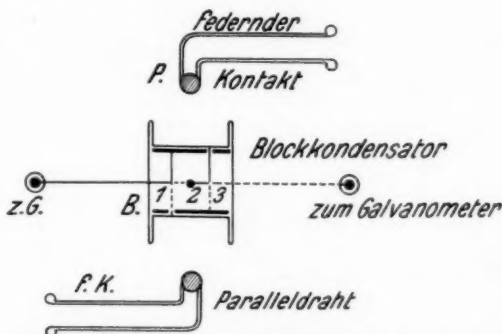
Die Verzögerungszeit zwischen Ankunft der Wanderwelle und Durchbruch wurde willkürlich so rückwärts berechnet, daß die Knallgeschwindigkeit in beiden Fällen gleich wird. Indessen ist sie für den Fall Fig. 21 wegen der größeren Funken-nähe sicher größer als im Falle Fig. 22.

Berechnet man die Knallgeschwindigkeit allein aus der doppelten Laufzeit, so ergeben sich die genannten oberen Grenzwerte. Die tatsächliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Knalles in dem nur etwa $\frac{1}{20}$ mm weiten Spalt entspricht demnach einer Größe, die nach anderen Beobachtungen zu erwarten ist.

Das elektrische Enderzeugnis

11. Frequenzbereich und Dämpfung einiger Oszillatoren

Bei der Verwendung des Kurzwellenoszillators ist die Wahl der äußeren Abmessungen für die Erzielung eines günstigen Frequenzbereiches von Wichtigkeit. Zur Orientierung können dabei die Intensitäts- und Dämpfungskurven dienen, die für einige Oszillatordurchmesser und Glimmerscheibendicken aufgenommen wurden. In üblicher Weise wurde dazu ein Lecher'sches Paralleldrahtsystem mit Thermokreuz in einer Plattenbrücke benutzt. Die aus der Resonanzkurve in bekannter Weise sich ergebenden Dämpfungsdekremente beziehen sich auf Oszillator und Resonator zusammen.



Thermoelemente: Eisen —, Konstantan -----

1, 3: wirksame Kreuzungsstellen

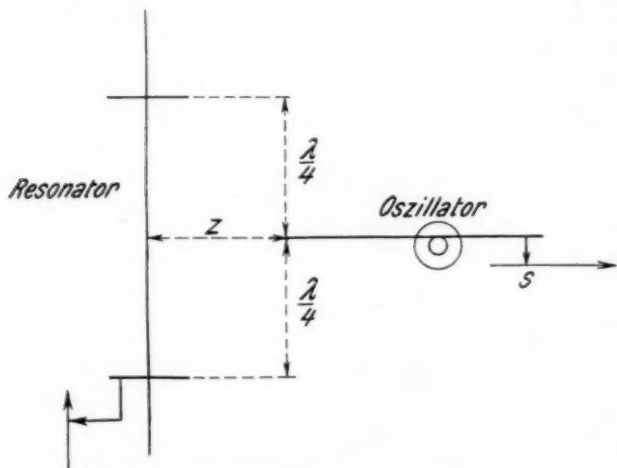
2: möglichst unwirksam gemachte Lötstelle (durch Abstrahlung und direkten Kurzschluß)

Mittlerer Teil der Plattenbrücke (aus 5 mm starkem Messing)

Fig. 24

Fig. 24 zeigt die besondere Konstruktion der Plattenbrücke, die zwei in Reihe geschaltete Thermoelemente enthält, um die Empfindlichkeit zu heben. Zur Vermeidung von unerwünschten Nebenschlüssen für den Galvanometerstrom sind die aus 0,015 mm starkem Eisen- bzw. Konstantandraht bestehenden Thermoelemente einseitig durch einen winzigen Kondensator abgeblockt. Die beiden Kreuzungsstellen sind nicht verlötet, da dieses die Wärmekapazität und damit die Trägheit

heraufsetzt und wegen höherer Wärmeausstrahlung die Stromempfindlichkeit herabdrückt. Das verwendete Galvanometer (normales Drehspulinstrument) besaß eine erheblich geringere Empfindlichkeit, als das von Rukop (a. a. O.) benutzte. Daher mußte der Abstand zwischen Oszillator und Resonator verhältnismäßig gering gemacht werden. Um möglichst einfache Kopplungsverhältnisse zu erhalten und vor allem den Einfluß



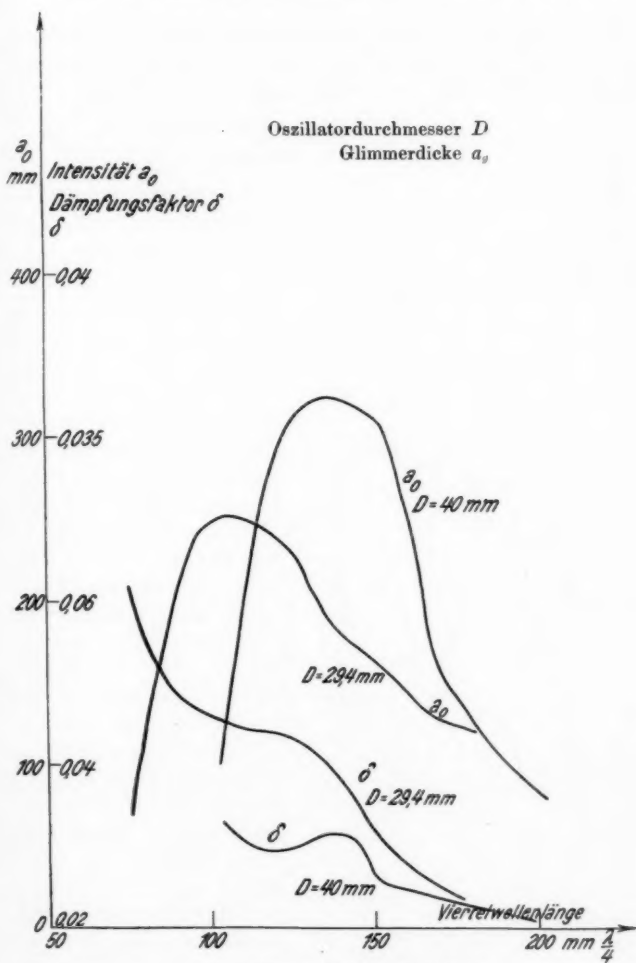
Anordnung zur Intensitäts- und Dämpfungsmessung

Fig. 25

der Zuleitungen zu verkleinern, wurde die Aufstellung nach Fig. 25 vorgenommen. Alle maximalen Galvanometerausschläge a sind nach dem Ausdruck:

$$\frac{a_0}{a} = \left(\frac{z}{z_0} \right)^{1,5}$$

auf einen Ausschlag a_0 beim Normalanstand $z_0 = \frac{\lambda}{4}$ umgerechnet, nachdem durch einen besonderen Versuch die Brauchbarkeit der angewandten Formel im Verwendungsbereich erwiesen war. Natürlich handelt es sich nur um eine erste Annäherung, indes würde eine exakte Behandlung einen größeren theoretischen Aufwand erfordern. Die Beobachtungen sind durch Kurven in Figg. 26 und 27 dargestellt. Die Dämpfung



Intensität und Dämpfungsfaktor

Fig. 26

für jede Resonanzkurve wurde aus ihrer Resonanzbreite $\Delta \lambda$ bei halber Resonanzintensität nach dem Ausdruck:

$$\delta = \pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda_{\text{res.}}}$$

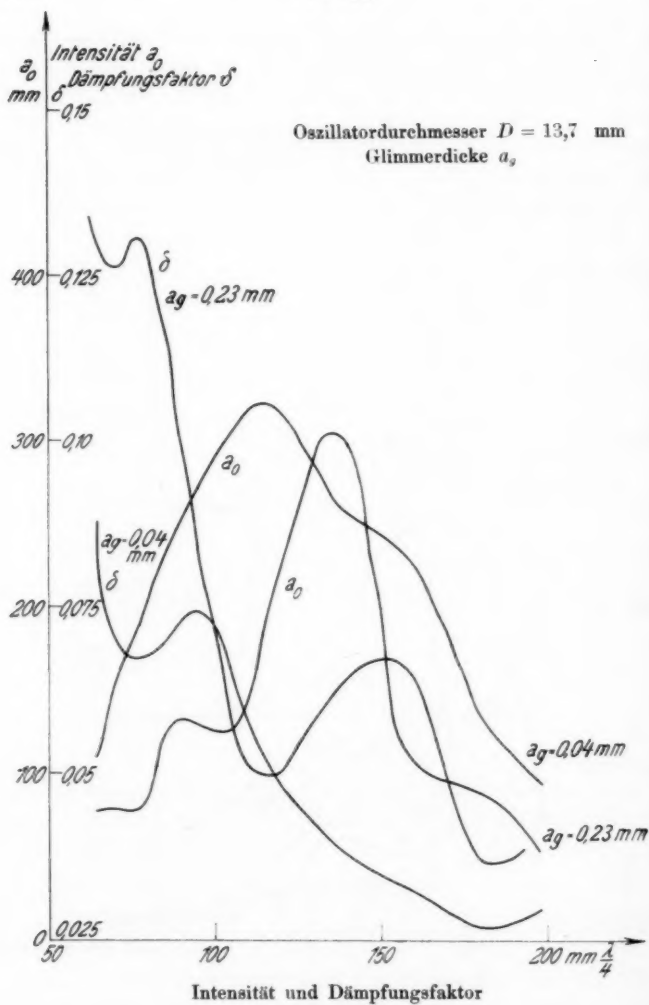


Fig. 27

berechnet. Allgemein fällt ein ständiges Anwachsen der Dämpfung nach höheren Frequenzen zu auf, das auf die geringere Interferenz- und somit Löschwirkung der starken

Plattenströme mit den in diesem Falle zu schwachen Gabelströmen zurückzuführen ist. Ferner findet man Anomalien der Dämpfung in der Nachbarschaft eines Intensitätsmaximums. Hier wird offenbar die Löschwirkung durch die längere Schwebungsdauer der zu sehr benachbarten Platten- und Gabelfrequenz verzögert.

Vergleicht man die Intensitätsverteilung für den achsensymmetrischen Oszillator mit Kurven, wie sie Rukop (a. a. O.) für den Mieschen angibt, so zeigt sich eine wesentlich einfachere Struktur. Dort findet man zahlreiche ausgezeichnete Werte, während hier gewöhnlich nur ein Maximum zu finden ist. Eine Ausnahme bildet die eine der Kurven nach Fig. 27, bei der der Oszillator mit einer relativ dicken Glimmerplatte versehen war. Man sieht zwei Maxima mit dazugehörigen zwei extremen Dämpfungswerten, die interessanterweise zu ersteren nach außen verschoben liegen. Die Verwandtschaft zu dem Mieschen Oszillator kommt sichtlich durch die Verkleinerung der Kapazität bei gleichzeitiger Vergrößerung der Induktivität zustande.

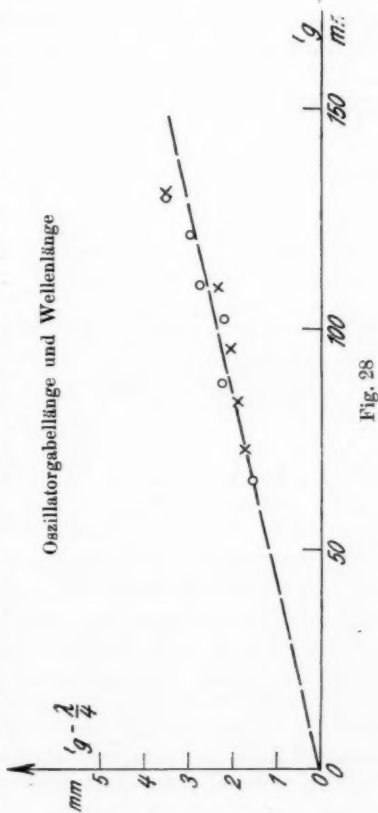


Fig. 28

In Fig. 28 ist der Zusammenhang zwischen der Gabellänge und der Wellenlänge dargestellt. Der Unterschied zwischen

Gabellänge und $\lambda/4$ ist gering und nahezu eine Konstante, wenn die Dicke der Glimmerscheibe geändert wird.

12. Eigenfrequenz des Stoßkreises

Die Hauptfrequenz eines in der Mitte durchschlagenen Plattenkondensators läßt sich nach R. Rüdénberg (30) berechnen. Der Gedankengang ist kurz folgender: Sieht man von der Dämpfung ab, die nur wenig Einfluß auf die Frequenz hat, so ist die Summe der magnetischen und elektrischen Feldenergie unveränderlich.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C e^2 \right) = 0$$

mit

$$e = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

erhält man

$$L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = 0,$$

d. h. die Spannungen an Selbstinduktion und Kapazität sind stets entgegengesetzt gleich. Aus dieser Differentialgleichung ist der Schwingungscharakter des Stromes i zu ersehen, sein Maximalwert beträgt:

$$I = E \sqrt{\frac{C}{L}}$$

und die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \text{ sec}^{-1}.$$

Beide Größen hängen nur von den Energiefaktoren L und C ab, die in folgendem berechnet werden sollen. Vorausgesetzt wird, daß die Abmessungen des Kondensators (Durchmesser D , Glimmerdicke a_g) klein gegen die Wellenlänge seien, was wirklich zutrifft, wie später das Ergebnis zeigt. Gleichzeitig wird von den konstruktiven Besonderheiten in der Mitte des Oszillators abgesehen, ebenso wie wir auch die Feldlinien außerhalb des Plattenzwischenraumes vernachlässigen. Dann ist die elektrische Feldstärke an allen Punkten gleich, und der elektrische Energiefaktor wird gleich der Kapazität des Kondensators:

$$C = \frac{\epsilon \cdot D^2}{16 \cdot v^2 \cdot a_g}.$$

Die räumliche Verteilung der magnetischen Feldstärke wird nach dem Grundgesetz ermittelt, daß ihr Linienintegral gleich dem 4π -fachen des umschlungenen Stromes ist. Der Funken-

strom fließt in der einen Richtung, der Verschiebungsstrom gleichmäßig über den Kondensator verteilt in der andern. Ist der Durchmesser des Funkens d_f , so wird schließlich:

$$L = 2 a_g \cdot \left(\ln \frac{D}{d_f} - \frac{1}{2} \right).$$

So ergibt sich die Wellenlänge

$$\lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} = \pi D \sqrt{\frac{\epsilon}{2} \left(\ln \frac{D}{d_f} - \frac{1}{2} \right)}.$$

Als Beispiel rechnen wir die Verhältnisse für Fig. 26 nach, wo mit

$$d_f = 0,015 \text{ cm}, \quad \epsilon = 8,$$

sich Wellenlängen von

$$\lambda = 57 \text{ cm für } D = 4,0 \text{ cm}$$

$$\lambda = 39 \text{ cm für } D = 2,9 \text{ cm}$$

ergeben. Die Übereinstimmung ist überraschend gut. Für kleinere Durchmesser sind die tatsächlichen Wellenlängen größer als die nach obiger Formel gerechneten. Im Falle der Fig. 27 für $D = 1,37 \text{ cm}$ zeitigt die Rechnung kein brauchbares Ergebnis, da die gemachten Vernachlässigungen unzulässig werden. Ein Vergleich läßt aber eines erkennen, was aus der Rechnung hervorgeht, nämlich daß die Dicke der Glimmerplatte auf die Hauptwellenlänge des Plattenkreises keinen Einfluß ausübt. Das Intensitätsmaximum der einen Kurve hat sich offenbar nur durch die Vorgänge bei der Kopplung in zwei Teilmaxima aufgespaltet; der Schwerpunkt der Intensitätsfläche ist aber gleich geblieben.

Über die Stromstärke im Funken gibt die weiter oben bereits genannte Formel

$$I = E \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Aufschluß. Für die als Beispiel bereits gerechneten Oszillatoren ergeben sich die hohen Werte von 650 und 480 Ampere.

13. Zur Frage der Konstanz

Wie aus den früheren Abschnitten ersichtlich ist, arbeiten Schaltungen mit Stoßfunkenoszillatoren meist ziemlich verwickelt. Gerade dieser Umstand gibt vielerlei Möglichkeiten zu unregelmäßigen Störungen, die die Brauchbarkeit für Meß-

zwecke stark herabsetzen können. An sich braucht ein Funkenstoß nicht anders zu verlaufen als der andere. Das ist aber schlechterdings nicht möglich, wenn jeder einzelne Funke andere elektrische und mechanische Vorbedingungen hat. Je weniger solche Möglichkeiten bei einer bestimmten Betriebsweise vorkommen, desto besser wird die Konstanz und Reproduzierbarkeit der Kurzwellen sein. Auf diesem Wege führt der symmetrisch aufgebaute Oszillator in Verbindung mit der Wanderwellenschaltung sicher ein Stück vorwärts. Die Wellenerzeugung ist auch gut reproduzierbar, da durch Festlegung einer beschränkten Anzahl von Versuchsgrößen sich immer wieder dieselben Verhältnisse herstellen lassen. Es liegt aber durchaus im Bereich der Möglichkeit, daß durch irgendwelche Kunstgriffe eine weitere Vereinfachung und damit Verbesserung erreicht werden kann. Das müßte sich vor allem in der Richtung nach höheren Frequenzen hin wertvoll auswirken.

Zusammenfassung

Im Anschluß an den Stoßfunkenoszillator von Mie und Rukop entwickelt Verfasser einen neuen symmetrisch aufgebauten Oszillator und betreibt ihn direkt von einer Gleichstrombatterie aus statt durch ein Induktorium. Der zum Teil ziemlich verwickelte Mechanismus der Oszillatoraufladung wird mit der Leuchtröhre und Drehspiegel, mit dem Kathodenstrahloszillographen und allgemein elektrisch untersucht. Die Entdeckung eigenartiger Narbenzeichnungen auf der Oberfläche der Funkenelektroden ermöglicht einen Einblick in die Mitwirkung mechanisch-akustischer Schwingungen im Innern der Funkenstrecke. Nach bekannten Verfahren aufgenommene Intensitäts- und Dämpfungskurven an einigen Oszillatoren im Verein mit einer allerdings nach höheren Frequenzen hin nur begrenzt brauchbaren Rechnung erleichtern die Auswahl eines für einen bestimmten Meßbereich günstigsten Oszillators.

Literaturverzeichnis

(Auf die vor den Arbeiten angegebenen Zahlen wird im Text Bezug genommen.)

- 1) H. Barkhausen und K. Kurz, Die kürzesten mit Vakuumröhren herstellbaren Wellen. *Phys. Ztschr.* **21**. S. 1—6. 1920.
- 2) K. Kohl, Über kurze ungedämpfte Wellen. *Phys. Ztschr.* **28**. S. 732—734. 1927.

- 3) W. Heim, Dispersionsmessungen im Gebiete kurzer elektrischer Wellen. *Ztschr. f. Hochfrequenz* **30**. S. 160—167. 176—183. 1927.
- 4) P. Drude, Eine bequeme Methode zur Demonstration des elektrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten. *Ann. d. Phys.* **55**. S. 633. 1895.
- 5) A. R. Colley, Über die Anordnungen der Methode der Drahtwellen für Zwecke der Untersuchung der Dispersion im elektrischen Spektrum von Flüssigkeiten. *Phys. Ztschr.* **10**. S. 329—340. 1909.
- 6) H. Hertz, Über sehr schnelle elektrische Schwingungen. *Ann. d. Phys.* **31**. S. 421—448. 1887.
- 7) A. Righi, Versuche mit Hertzschen Erregern von kleiner Wellenlänge. *Lincei Rend.* **5**. S. 505—518. 1893.
- 8) P. Lebedew, Über die Doppelbrechung der Strahlen elektrischer Kraft. *Ann. d. Phys.* **56**. S. 1—17. 1895.
- 9) A. Lampa, Über die Brechungsexponenten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen. *Wiener. Ber.* **105**. S. 589—600. 1896.
- 10) W. Möbius, Über die Dispersion von Wasser und Methylalkohol zwischen 7 und 35 mm Wellenlänge und Vorversuche zur Verwendung noch kürzerer elektrischer Wellen. *Ann. d. Phys.* **62**. S. 293—322. 1920.
- 11) E. F. Nichols und I. D. Tear, Short electric waves. *Phys. Rev.* **21**. S. 587—610. 1923.
- 12) A. Glagolewa-Arkadiewa, Eine neue Strahlungsquelle der kurzen elektrischen Wellen von ultrahertzscher Frequenz. *Ztschr. f. Phys.* **24**. S. 163—165. 1924.
- 13) M. Lewitsky, Ein Versuch, von den kurzen elektrischen zu den langen Wärmewellen überzugehen. *Phys. Ztschr.* **25**. S. 107. 1924.
- 14) G. Mie, Eine bequeme Methode zur Erzeugung ganz schwach gedämpfter elektrischer Schwingungen von kleiner Wellenlänge. *Phys. Ztschr.* **11**. S. 1035. 1910.
- 15) H. Rukop, Messungen im elektromagnetischen Spektrum des Wassers mit wenig gedämpften, durch Stoßerregung hervorgebrachten Schwingungen von 65—20 cm Wellenlänge. *Ann. d. Phys.* **42**. S. 489—532. 1913.
- 16) E. Rückert, Brechung und Absorption des Wassers für meterlange elektrische Wellen. *Ann. d. Phys.* **55**. S. 151—176. 1918.
- 17) R. Weichmann, Ein Bandenabsorptionsspektrum des Wassers bei Wellenlängen von mehreren Dezimetern. *Ann. d. Phys.* **66**. S. 501—545. 1921.
- 18) M. Wien, Über einen Einfluß des Metalls der Funkenstrecke auf die Frequenz elektrischer Schwingungen. *Phys. Ztschr.* **11**. S. 283—287. 1910.
- 19) M. Wien, Die Erzeugung schwach gedämpfter elektrischer Schwingungen. *Phys. Ztschr.* **11**. S. 937—939. 1910.
- 20) M. Wien, Über eine neue Form der Stoßerregung elektrischer Schwingungen. *Phys. Ztschr.* **11**. S. 76—77. 1910.

21) R. v. Trautenberg und W. Hahnemann, Untersuchungen der Dämpfung von Funkenstrecken in Schwingungskreisen der Hochfrequenztechnik. *Phys. Ztschr.* **8**, S. 498—504. 1907.

22) H. Barkhausen, Funkenwiderstand. *Phys. Ztschr.* **8**, S. 624 bis 630. 1907.

23) D. Roschansky, Über die Löschwirkung des Funkens auf gekoppelte Schwingungen. *Phys. Ztschr.* **13**, S. 931—935. 1912.

24) I. Ganswindt, Erzeugung und Empfang kurzer elektrischer Wellen. Berliner Dissertation. 1914.

25) Br. Glatzel, Eine neue Methode zur Erzeugung von Hochfrequenzströmen nach dem Prinzip der Stoßerregung. *Phys. Ztschr.* **11**, S. 886—890. 890—894. 1910.

26) H. Plendl, Zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufs von Wechselströmen mit Hilfe der Braunschen Röhre. *Ztschr. f. Hochfrequenz.* **27**, S. 153—155. 1926.

27) W. Lenz, Berechnung der Eigenschwingung einlagiger Spulen. *Ann. d. Phys.* **43**, S. 749—797. 1914.

28) W. Mach und I. Sommer, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionsschallwellen. *Wiener Akad. Ber.* **75**, S. 1—30. 1877.

29) E. Mach, O. Tumlirtz, C. Kögler, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Funkenwellen. *Wiener Akad. Ber.* **77**, S. 1—26. 1878.

30) R. Rüdenberg, Elektrische Schaltvorgänge und verwandte Störungserscheinungen in Starkstromanlagen. Berlin. 1923.

Berlin-Charlottenburg, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 16. Juli 1929)